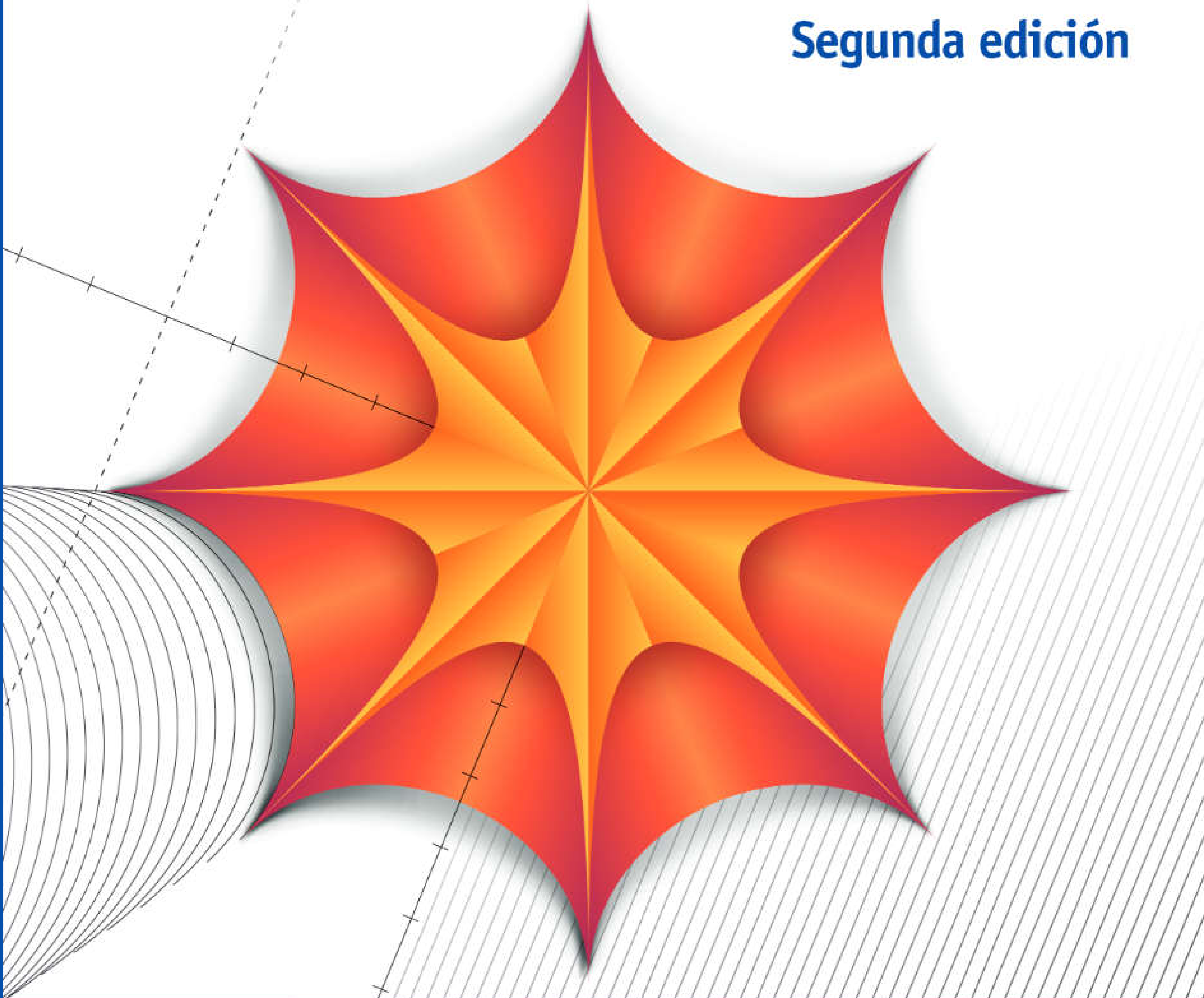
Benjamín Garza Olvera

Cálculo diferencial

Segunda edición



ALWAYS LEARNING

PEARSON

Cálculo diferencial

Cálculo diferencial

BENJAMÍN GARZA OLVERA

Revisión técnica

David Mota Hernández
Presidente de la Academia de Matemáticas
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 68
"Ricardo Flores Magón" (CBTIS 68)
Puerto Vallarta, Jalisco, México

Yolanda Sandoval Sandoval
Jefa del Departamento de Servicios Docentes
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 68
"Ricardo Flores Magón" (CBTIS 68)
Puerto Vallarta, Jalisco, México

Guillermo Govea Anaya
Universidad Nacional Autónoma de México

PEARSON

Datos de catalogación

Autor: Garza Olvera, Benjamín.

Cálculo diferencial
Matemáticas IV, educación media superior
2ª Edición

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2015
ISBN: 978-607-32-3061-2

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 360

Cálculo diferencial

El proyecto didáctico *Cálculo diferencial* es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, S. A. de C. V., por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento Pedagógico de Pearson Educación de México, S. A. de C. V.

Especialistas en Cálculo diferencial responsables:
Obra original: Benjamín Garza Olvera
Revisión técnico-pedagógica: David Mota, Yolanda Sandoval y Guillermo Govea

■ **Dirección general:** Sebastián Rodríguez ■ **Dirección de contenidos y servicios digitales:** Alan Palau ■ **Gerencia de contenidos K-12:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Gerencia de arte y diseño:** Asbel Ramírez ■ **Coordinación de bachillerato y custom:** Lilia Moreno ■ **Edición sponsor:** Berenice Torruco ■ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Supervisión de arte y diseño:** Enrique Trejo ■ **Asistencia editorial:** José Huerta ■ **Edición de desarrollo:** Kenyi Casillas ■ **Corrección de estilo:** Juan Carlos Hurtado ■ **Lectura de pruebas:** Vicente Gutiérrez ■ **Diseño de portada:** Pulso Comunicación ■ **Diagramación:** Ediciones OVA.

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-3061-2
ISBN E-BOOK: 978-607-32-3089-6
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-3073-5

Avenida Antonio Dovalí Jaime # 70.
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec Ed Plaza Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón, México, Distrito Federal C. P. 01210
Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

Impreso en México. Printed in Mexico.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 17 16 15 14

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

Contenido

Cálculo diferencial

UNIDAD 2 Límites y continuidad de funciones, 61

UNIDAD 3 Derivación de funciones, 91

Presentación

El objetivo principal fue escribir un libro que ustedes los estudiantes pudieran leer, entender y disfrutar. A lo largo del libro se utiliza un lenguaje claro y preciso que propicia la generación de conocimientos que, por lo general, resultan difíciles de comprender y aprender. Se utilizan oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos a detalle. Los temas fundamentales de cálculo diferencial permiten cimentar bases más sólidas entre los conocimientos de álgebra, geometría y trigonometría, así como de geometría analítica; todas las definiciones y explicaciones son sencillas y claras para que el estudiante adquiera habilidad en la ejercitación de problemas mediante el razonamiento inductivo. La didáctica que se desarrolla en el texto se fundamenta en una exposición de conceptos introductorios y ejemplos demostrativos, así como, una diversificación en el planteamiento del problema. Los problemas, ejercicios y prácticas que se desarrollan a lo largo de las unidades utilizan distintos tipos de reactivos, lo cual permite tener una evaluación continua del proceso enseñanza-aprendizaje. Se hace énfasis en el incremento gradual de la complejidad de cada ejercicio hasta lograr el cambio de la memorización por un razonamiento más analítico en el planteamiento y desarrollo del proceso de solución de un problema determinado. Al final del libro se encuentran las respuestas a los ejercicios impares para ayudar al estudiante a evaluar el proceso de solución con la respuesta a dicho problema. Los contenidos de este libro tienen como propósito facilitar el estudio de las matemáticas.

Agradezco el apoyo de cada uno de los compañeros de academia local, estatal y nacional para la revisión de este material. Asimismo, a todas las autoridades educativas que confiaron en mi esfuerzo y dedicación para lograr contenidos de alta calidad. De igual forma agradezco al editor, por su esmerada atención a la impresión de esta obra. Por último a mis ex-alumnos y en especial a mi familia a quienes distingo con este mensaje filosófico. *El sendero de la educación nos permite mediante el esfuerzo y la perseverancia encontrar los ideales de la vida y cristalizarlos como un mérito a nuestra virtud.*

EL AUTOR
Q. I. y Lic. Benjamín Garza Olvera

Metodología para el trabajo con este material

El material está dividido en cuatro unidades, donde se desarrollan los contenidos actuales del programa general de bachillerato tecnológico. Cada unidad cuenta con una evaluación diagnóstica, el desarrollo de los diversos temas y una autoevaluación.

Evaluación diagnóstica

Es una serie de ejercicios que sirven como repaso operativo, pero en general se busca desarrollar habilidades de lógica, aritmética y álgebra.

Cuadros de competencias genéricas y disciplinares

Se localiza en cada una de las actividades que favorecen el logro de competencias; en este apartado el alumno, con la mediación del maestro, deberá determinar cuáles son las competencias genéricas y las competencias disciplinares que está desarrollando y escribir en el cuadro las que sean pertinentes.

Autoevaluación

Es una colección de ejercicios que ayudan a reforzar el trabajo desarrollado a lo largo de la unidad.

Competencias genéricas

Categorías	Competencias
Se autodetermina y cuida de sí	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. 2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros. 3. Elige y practica estilos de vida saludables.
Se expresa y se comunica	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Piensa crítica y reflexivamente	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
Aprende de forma autónoma	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
Trabaja en forma colaborativa	8. Participa y colabora de manera efectiva en diversos equipos.
Participa con responsabilidad en la sociedad	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo. 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales. 11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica con acciones responsables.

UNIDAD 1

Funciones

Evaluación diagnóstica

1. De los siguientes conjuntos de pares ordenados indica si forman parte, o no, de una función.

   a) $\{(2,10), (8,9), (9,8), (10,2)\}$
   b) $\{(33,1), (28,99), (33,8), (0,4)\}$
   c) $\left\{\left(\frac{5}{10},\frac{2}{10}\right),\left(\frac{5}{6},\frac{2}{4}\right),\left(\frac{7}{8},\frac{5}{6}\right),\left(\frac{9}{2},\frac{2}{10}\right)\right\}$

2. Si $f(x)=\frac{1}{x^2}$, determina el conjunto finito de pares ordenados para $x=\{1,3,7,11,13\}$

3. ¿Cuál es la diferencia entre dominio y rango?

4. Dada la función $y=\sqrt{6+2x}$, encuentra el dominio y rango de $f(x)$.

5. Si se tienen las funciones denotadas por $f=\{(1,2), (3,2), (5,1), (6,4)\}$ y $g=\{(2,9), (4,1), (6,5), (8,0)\}$, encuentra $(f+g)$ y $(f-g)$.

Funciones

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca los antecedentes históricos del cálculo, así como el concepto de función.
- Identifique constantes, variables e intervalos.
- Identifique y determine el dominio y rango de una función.
- Identifique los diferentes tipos de funciones.
- Analice e interprete los resultados mediante la gráfica de una función.
- Aprenda a realizar operaciones con funciones.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Antecedentes históricos.
- Funciones.
- Clasificación de los diferentes tipos de funciones.
- Análisis gráfico de funciones.
- Operaciones con funciones.

Contenidos procedimentales

- Conceptualizará lo que es una función matemática.
- Identificará diferentes formas de representar un intervalo, así como el dominio y el rango.
- Notará las diferencias entre los tipos de funciones existentes.
- Analizará las funciones mediante gráficas.
- Resolverá problemas utilizando los conceptos básicos de las operaciones con funciones.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de una función.
- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Antecedentes históricos

El cálculo infinitesimal es la rama de las matemáticas que comprende el estudio y las aplicaciones del cálculo diferencial y del cálculo integral.

El cálculo diferencial se originó en el siglo XVII al realizar estudios sobre el movimiento, es decir, al estudiar la velocidad de los cuerpos al caer al vacío, ya que ésta cambia de un momento a otro; la velocidad en cada instante debe calcularse teniendo en cuenta la distancia que recorre en un tiempo infinitesimalmente pequeño.

En 1666, el científico inglés Isaac Newton fue el primero en desarrollar métodos matemáticos para resolver problemas de esta índole. Casi al mismo tiempo, el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz realizó investigaciones similares ideando símbolos matemáticos que se aplican hasta nuestros días.

Destacan también otros matemáticos por haber hecho trabajos importantes relacionados con el cálculo diferencial, entre ellos, Pierre Fermat, matemático francés, quien en su obra diseñó los métodos para determinar los máximos y mínimos. Dicha obra influenció a Leibniz en la invención del cálculo diferencial.

Fermat dejó casi todos sus teoremas sin demostrar, ya que por aquella época era común entre los matemáticos plantearse problemas unos a otros, por lo que frecuentemente se ocultaba el método propio de solución, con el fin de reservarse el éxito para sí mismo y para su nación, ya que había una gran rivalidad entre los franceses, alemanes y los ingleses.

Nicolas Oresme, obispo de la comunidad de Lisieux, Francia, estableció que en la proximidad del punto de una curva en la que la ordenada se considera máxima o mínima, dicha ordenada varía más pausadamente.

Tiempo después, Johannes Kepler coincidió con lo establecido por Oresme, lo que permitió a Fermat igualar a cero la derivada de la función en su estudio de máximos y mínimos, las tangentes y las cuadraturas, debido a que la tangente a la curva en los puntos en que la función tiene su máximo o su mínimo, es decir, la función, es paralela al eje x donde la pendiente de la tangente es nula.

Isaac Barrow, maestro de Newton, quien por medio del **triángulo característico**, determinó que la hipotenusa es un arco infinitesimal de curva y sus catetos son incrementos infinitesimales en que difieren las abscisas y las ordenadas de los extremos del arco.

Empleando esas aportaciones, Newton concibió el método de las **fluxiones**, considerando la curva como la trayectoria de un punto que fluye; denomina **momento de la cantidad fluente** al arco corto recorrido en un tiempo excesivamente pequeño, y llama **razón del momento** al tiempo correspondiente, es decir, la velocidad.

Por lo tanto, **fluente** es la cantidad variable que se identifica como **función**; **fluxión** es la velocidad o rapidez de variación de la fluente, que se identifica como la **derivada**; al incremento infinitesimal o instantáneo de la fluente se le llama **momento**, mismo que se identifica como la **diferencial**.

El principio establece que **los momentos de las funciones son entre sí como sus derivadas**.

La concepción de Leibniz se logra al estudiar el problema de las tangentes y su inverso, basándose en el triángulo característico de Barrow, observando que el triángulo es semejante al que se forma con la tangente, la subtangente y la ordenada del punto de tangencia; así mismo, es igual al triángulo formado por la normal, la subnormal y la ordenada del mismo punto. Los símbolos dx, $\frac{dy}{dx}$, la palabra **derivada** y el nombre de **ecuaciones diferenciales** se deben a Leibniz.

Agustin Louis Cauchy, matemático francés, impulsor del cálculo diferencial e integral, autor de la teoría de las funciones de las variables complejas, basándose para ello en el método de los límites; las definiciones de **función de función** y la de **función compuesta** también se deben a Cauchy.

Jacobo Bernoulli introduce la palabra **función** en el cálculo diferencial y la simbología $f(x)$ se debe a Leonard Euler, ambos matemáticos suizos. John Wallis enuncia el concepto de **límite** y la representación simbólica **lim** se debe a Simon Lhuilier. El símbolo tiende a ($\rightarrow$) lo implantó J. G. Leathem.

Los procesos generales y las reglas prácticas sencillas del cálculo diferencial se deben a Newton y a Leibniz; sin embargo, por más de 150 años el cálculo diferencial continuó basándose en el concepto de lo infinitesimal.

En el siglo XIX se han encontrado bases más firmes y lógicas al margen de lo infinitamente pequeño.

El cálculo diferencial se ha ido desarrollando a través de los años, consolidándose como herramienta técnico-científica empleada en el análisis de procesos que contienen magnitudes en constante cambio. Por ejemplo, la velocidad de las reacciones químicas, los cambios atmosféricos, los desarrollos sociales y económicos de las naciones, en la astronomía, la estadística, etcétera.

A Newton y a Leibniz se les llama fundadores del cálculo, ya que fueron los primeros en estudiar el problema geométrico fundamental del cálculo diferencial, que se denomina **problema de las tangentes**, en el cual hay que determinar las rectas tangentes a una curva dada.

EJERCICIO 1

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

1. ¿Qué estudia el cálculo infinitesimal?
2. ¿Qué aportaciones dieron origen al cálculo diferencial?
3. ¿Cuál es el nombre de los fundadores del cálculo diferencial?
4. Cita la aportación de Pierre Fermat al cálculo diferencial.
5. Escribe los conceptos que estableció Nicolás Oresme en el estudio de los máximos y mínimos.
6. Describe el estudio de Isaac Barrow sobre el triángulo característico.
7. Explica los razonamientos de Isaac Newton sobre el método de las fluxiones.
8. Describe la aportación de Gottfried Leibniz al cálculo diferencial.
9. ¿Qué aportaciones hizo Agustin Louis Cauchy al cálculo diferencial?
10. Explica la evolución histórica del cálculo diferencial.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones

Concepto de relación mediante la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos

Uno de los conceptos fundamentales en matemáticas es el de **relación**, la cual se define como la correspondencia que tiene un elemento de un conjunto con respecto a uno o más elementos de un segundo conjunto. La relación conduce a la formación de **pares ordenados** de cualquier tipo de objetos, gráficas, hechos, números reales, figuras geométricas, datos, etcétera.

Ejemplos

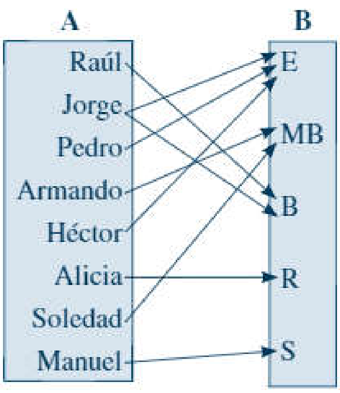
1. Los elementos químicos en la tabla periódica se agrupan en periodos y grupos; así, el cloro se ubica en el tercer periodo, grupo VIIA; también localizamos el elemento bario en el sexto periodo, grupo IIA. Lo anterior da lugar a pares ordenados constituidos por un conjunto de periodos y un conjunto de grupos, por lo que se trata de una relación, ya que a un mismo periodo le corresponden varios elementos.

2. Al despejar y en la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, resulta que $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ estableciendo la existencia de dos valores de y que corresponden a un solo valor de x. A esta correspondencia se le llama relación. Para algunas expresiones matemáticas un determinado valor de x da lugar a dos, tres o más valores correspondientes a y.

3. La calificación final del aprovechamiento de un curso de control de calidad para un conjunto A de estudiantes se asigna mediante un conjunto B de literales, es decir:

   A = {Raúl, Jorge, Pedro, Armando, Héctor, Alicia, Soledad, Manuel}
   B = {E (excelente), MB (muy bien), B (bien), R (regular), S (suficiente)}

   Al establecer la correspondencia entre estudiantes y calificaciones, obtenemos el siguiente conjunto de pares ordenados.



Pares ordenados

(Raúl, B), (Jorge, B), (Pedro, E), (Armando, MB), (Héctor, E), (Alicia, R), (Soledad, MB), (Manuel, S)

Concepto de función como un caso particular de la relación

La idea de **función** surge de un proceso en el que se analizan los cambios y movimientos que dependen de una magnitud base con respecto a otra, es decir, la **distancia** que un cuerpo puede recorrer en un **tiempo** depende de su velocidad; el **área** de un cuadrado, de la **longitud** de su lado; la **longitud** de una circunferencia depende de su **radio**; el **volumen** de una esfera, de su **diámetro**; la **presión** de un gas comprimido depende de su **temperatura**; los **impuestos** sobre el **trabajo** dependen del **salario ganado**.

La función es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos; cuando dos variables están relacionadas, se establece que el valor de una de ellas queda determinado si se le asigna un valor a la otra; en otras palabras, *a cada elemento de un conjunto le corresponde únicamente otro elemento de un segundo conjunto.*

Ejemplo

Conjunto x		Conjunto y
1	$\rightarrow$	2
2	$\rightarrow$	16
3	$\rightarrow$	54
4	$\rightarrow$	128
$\vdots$		$\vdots$
n	$\rightarrow$	$2n^3$

La relación $y = 2x^3$ es un caso particular denominado **función**.

Por lo tanto, toda función es una relación; pero existen muchas relaciones que no son funciones. **Una función es un conjunto de pares ordenados de elementos en el que dos pares ordenados distintos no deben tener el mismo primer elemento**.

Ejemplo

El conjunto da los pares ordenados $\{(1,3), (3,5), (4,6), (5,7), (6,8)\}$ constituye una función, ya que ninguno de los pares ordenados tiene igual su primer elemento.

Nomenclatura de función

La notación más usual de función emplea literales como $f, g, h, \phi, f', F, G, H$. El símbolo $f(x)$, se lee "f de x", y denota el segundo elemento del par ordenado en el cual el primer elemento es x; por lo tanto, $f(x)$ se denomina **valor** de la función de x.

Ejemplo

Si $f(x) = x^2 - 1$, determina el conjunto finito de pares ordenados para $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Como $f(x) = x^2 - 1$, tenemos que:

$$f(1) = (1)^2 - 1 = 0$$
$$f(2) = (2)^2 - 1 = 3$$
$$f(3) = (3)^2 - 1 = 8$$
$$f(4) = (4)^2 - 1 = 15$$
$$f(5) = (5)^2 - 1 = 21$$

$\therefore$ Los pares ordenados de la función son $(1,0), (2,3), (3,8), (4,15)$ y $(5,24)$.

La nomenclatura para el conjunto de pares ordenados de una función es $f = \{(x, f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Constantes

Son cantidades que conservan siempre un valor fijo y pueden ser **absolutas** o **arbitrarias**.

Constante absoluta o numérica. Es aquella cuyo valor nunca cambia, es decir, conserva su valor en cualquier situación o contexto.

Ejemplo

En la ecuación $A = \pi r^2$ que se emplea para determinar el área de un círculo, π es una constante absoluta, ya que su valor permanece fijo.

Constante arbitraria o parámetro. Es aquella a la que se le pueden atribuir valores diferentes y que sólo en un determinado contexto permanecerá constante el valor asignado; son cantidades que cambian de valor de un problema a otro, pero que al interior de éste no cambian.

Ejemplo

En la ecuación $y = a - bx$, las letras a y b son constantes arbitrarias o parámetros.
Por lo general representamos las constantes con números o con las primeras letras del alfabeto ($a, b, c, d,\ldots$).

Variables

Son cantidades a las que se les asignan un número ilimitado de valores; las variables pueden ser **independientes** o **dependientes**.

Variable independiente o argumento. En una función, es la segunda variable a la cual se le asignan valores a voluntad, dentro de los límites que señale el problema en particular.

Variable dependiente o función. Es la primera variable de la función, cuyo valor se determina al asignarle un valor específico a la variable independiente.

Ejemplo

En la expresión $y = 5x^2$, se identifica a y como la **variable dependiente** y a x como la **variable independiente**, ya que al asignarle un valor a x se determina el valor de y.

Intervalo de una variable

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y que están comprendidos entre dos de ellos, a y b, que se denominan extremos del intervalo. La diferencia que existe entre ambos extremos se conoce como **amplitud del intervalo**; ésta se calcula mediante el valor absoluto de la diferencia de ambas cantidades, $|a - b|$. La notación de intervalo es $[a,b]$ que significa intervalo de a hacia b; la notación para la variable es $a < x < b$ que se lee **la variable x es mayor que a y menor que b**. Existen diferentes tipos de intervalo.

Intervalo cerrado. Sean a y b números reales tal que $a < b$. El intervalo cerrado $[a,b]$ cuya notación representa al conjunto de los valores de la variable x tales que $a \leq x \leq b$; es decir,

$$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Intervalo abierto. Sean a y b números reales tal que $a < b$. El intervalo abierto (a,b) cuya notación representa al conjunto de valores de la variable x tales que $a < x < b$; es decir,

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

Intervalo semiabierto por la izquierda. Es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b, $a < x \leq b$, cuya notación es $(a,b]$; es decir,

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

Intervalo semiabierto por la derecha. Es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b, $a \leq x < b$, cuya notación es $[a,b)$; es decir,

$$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

Intervalo infinito. Es el conjunto de todos los números reales de la variable x tales que x es mayor que a; se representa por $(a,+\infty)$.

De forma similar, el conjunto de todos los números reales de la variable x tales que x es menor que b, se representa por $(-\infty,b)$.

La notación $[a,+\infty)$ representa el conjunto de todos los numeros reales de x tales que x es mayor o igual que a; la notación $(-\infty,b]$ representa el conjunto de todos los números reales de x tales que x es menor o igual que b; la notación $(-\infty,+\infty)$ representa el conjunto de todos los números reales.

Representación gráfica de los intervalos. En la recta real los valores a y b se denominan **extremos del intervalo**, los cuales pueden representarse mediante paréntesis o corchetes para indicar si pertenecen o no al intervalo en cuestión.

1. El intervalo cerrado $[a,b]$ contiene ambos extremos, es decir, todos los números x, tales que $a \leq x \leq b$.

Los puntos negros sobre la línea en a y b indican que dichos extremos están incluidos en el intervalo.

2. El intervalo abierto (a,b) no contiene a ninguno de los extremos, es decir, todos los números x, tales que $a < x < b$.

Los puntos vacíos sobre la línea en a y b indican que dichos extremos no están incluidos en el intervalo.

3. El intervalo semiabierto por la izquierda $(a,b]$ contiene a su extremo derecho, pero no a su extremo izquierdo, es decir, todos los números x, tales que $a < x \leq b$.

4. El intervalo semiabierto por la derecha $[a,b)$ contiene a su extremo izquierdo, pero no a su extremo derecho, es decir, todos los números x, tales que $a \leq x < b$.

5. El intervalo infinito abierto no contiene a su extremo izquierdo, pero se extiende indefinidamente a su derecha $(a,+\infty)$, es decir, todos los números x, tales que $a < x$.

6. El intervalo infinito abierto no contiene a su extremo derecho, pero se extiende indefinidamente a su izquierda $(-\infty,b)$ es decir, todos los números x, tales que $x < b$.

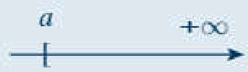
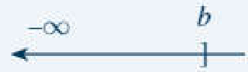
7. El intervalo infinito cerrado que contiene a su extremo izquierdo a, pero se extiende indefinidamente a su derecha $[a,+\infty)$, es decir, todos los números x, tales que $a \leq x$.

8. El intervalo infinito cerrado que contiene a su extremo derecho b, pero se extiende indefinidamente a su izquierda $(-\infty,b]$, es decir, todos los números x, tales que $x \leq b$.

9. El intervalo infinito $(-\infty,+\infty)$ se puede considerar abierto o cerrado, ya que puede contener o no a sus extremos a y b.

En la tabla 1.1 se resume la notación de intervalos y desigualdades, así como su representación gráfica.

Tabla 1.1 Resumen de la notación de intervalos.

Notación de intervalos	Notación de desigualdad	Representación gráfica
$[a,b]$	$a \leq x \leq b$	
(a,b)	$a < x < b$	
$(a,b]$	$a < x \leq b$	
$[a,b)$	$a \leq x < b$	
$(a,+\infty)$	$a < x$	
$(-\infty,b)$	$x < b$	
$[a,+\infty)$	$a \leq x$	
$(-\infty,b]$	$x \leq b$	

EJEMPLOS

Ejemplos

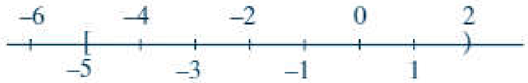
1 Escribe cada uno de los siguientes intervalos en la notación de desigualdad y elabora su gráfica.

a) $[-5,2)$ *b*) $(-6,3)$ *c*) $[-1,+\infty)$ *d*) $(-\infty,5)$

a) $[-5,2)$

Notación de la desigualdad $-5 \le x < 2$

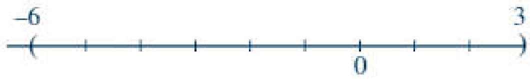
Representación gráfica



b) $(-6,3)$

Notación de la desigualdad $-6 < x < 3$

Representación gráfica



c) $[-1,+\infty)$

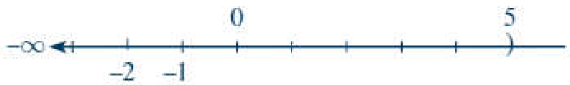
Notación de la desigualdad $-1 \le x$

Representación gráfica

d) $(-\infty,5)$

Notación de la desigualdad $x < 5$

Representación gráfica



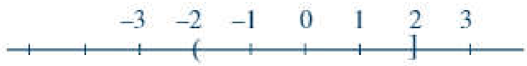
2 Escribe cada una de las siguientes desigualdades en la notación de intervalos y elabora su gráfica.

a) $-2 < x \le 2$ *b*) $-3 \le x \le 1$ *c*) $4 < x$ *d*) $x \le 5$

a) $-2 < x \le 2$

Notación de intervalos $(-2,2]$

Representación gráfica



b) $-3 \le x \le 1$

Notación de intervalos $[-3,1]$

Representación gráfica

c) $4 < x$

Notación de intervalos $(4,+\infty)$

Representación gráfica

d) $x \le 5$

Notación de intervalos $(-\infty,5]$

Representación gráfica

Dominio y rango de las funciones

Al definir la función como el conjunto de pares ordenados de números reales (x,y), tales que dos pares distintos no tienen el mismo primer elemento, al conjunto de todos los valores de los primeros elementos (x) de los pares ordenados se le denomina **dominio de la función** y se denota por *Domf*; al conjunto de todos los valores de los segundos elementos (y) de los pares ordenados se le denomina **rango de la función** y se denota por *Ranf*.

También la función se define como la relación entre dos variables, en donde la variable y depende de la variable x; si a cada valor de x le corresponde un solo valor de y se establece que y es función de x; así tenemos que x es la variable independiente y y es la variable dependiente o función.

Al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se denomina **dominio de la función**, y al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente se denomina **codominio**, **contradominio** o **recorrido de la función**.

Ejemplos

1. Dada la función $f = \{(4,12), (6,-7), (-1,4), (2,3), (-3,6)\}$, identifica el dominio y rango de la función.

   $Domf = \{4, 6, -1, 2, -3\}$ El dominio de la función consta de los primeros elementos de los pares ordenados.

   $Ranf = \{12, -7, 4, 3, 6\}$ El rango de la función consta de los segundos elementos de los pares ordenados.

2. Encuentra el dominio y el rango de la función de x que se define por $y = \sqrt{x-5}$.
   Asignando valores a la variable independiente, se puede elaborar una tabla como la que se muestra a continuación:

Dominio (x)	−4	−3	−2	−1	0	1	3	5	6	7	8	9	10
Rango (y)	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	0	1	1.41	1.73	2	2.23

   Para valores de $x < 5$, la función $y = \sqrt{x-5}$ no está definida dentro de los números reales; empleando la notación de intervalo de una variable resulta que $[5, +\infty)$ representa el dominio de la función.

   Para valores de $x \geq 5$, la función $y = \sqrt{x-5}$ se define siempre dentro de los números reales y aumenta al aumentar x. El rango de la función se representa por $[0, +\infty)$.

   Si a cada valor en el rango le corresponde un solo valor en el dominio, se establece que la función propuesta es uno a uno para los valores positivos únicamente del rango.

3. Encuentra el dominio y el rango de la función de x que se define por $y = \sqrt{1-x}$.
   Asignando valores a la variable independiente, se puede construir la siguiente tabla:

Dominio (x)	−1	−2	−3	−4	−5	−6	0	1	2	3	4
Rango (y)	1.41	1.73	2	2.23	2.44	2.64	1	0	*i*	*i*	*i*

Para valores de $x > 1$, la función $y = \sqrt{1-x}$ no está definida dentro de los números reales; el dominio de la función se representa por $(-\infty, +1]$.

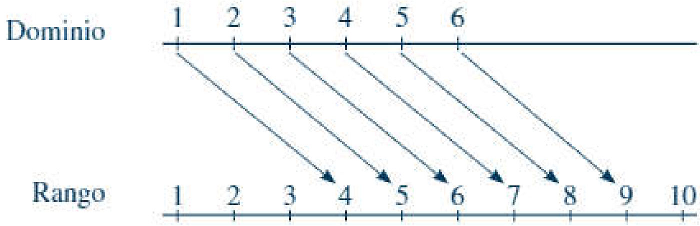
Para valores de $x \leq 1$, la función $y = \sqrt{1-x}$ se define siempre dentro de los números reales y aumenta al disminuir x. El rango de la función se representa por $[0,+\infty)$.

Regla de asignación o de correspondencia

Dada la función como un conjunto finito de pares ordenados de números reales, es decir:

$$f = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8), (6,9)\}$$

- El dominio de la función es el conjunto $Domf = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- El rango de la función es el conjunto $Ranf = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Representando gráficamente la correspondencia entre el dominio y el rango de la función, tenemos:



Se puede dar otra descripción que represente a la misma función por medio de una regla de asignación o de correspondencia, la cual permite asociar cada elemento del dominio con uno y sólo uno de los elementos del rango.

La función dada puede escribirse $f = \{(x,x+3) | \ x \in (1, 2, 3, 4, 5, 6)\}$

(El símbolo $\in$ significa que un elemento *pertenece a*...).

El dominio de la función es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la regla de correspondencia es $f(x) = x + 3$; así, cuando x toma valores en su dominio, se tiene que:

$$\begin{aligned} x = 1;\ f(1) = 1 + 3 = 4 \\ x = 2;\ f(2) = 2 + 3 = 5 \\ x = 3;\ f(3) = 3 + 3 = 6 \\ x = 4;\ f(4) = 4 + 3 = 7 \\ x = 5;\ f(5) = 5 + 3 = 8 \\ x = 6;\ f(6) = 6 + 3 = 9 \end{aligned}$$

Se observa que al conocer el dominio de la función y la respectiva regla de correspondencia, se puede determinar el rango de la función, con lo que se establece una función bien definida.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si f es una función cuyo dominio es el conjuto de los números reales y con regla de correspondencia $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, encuentra:

a) $f(2)$ *b)* $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ *c)* $f\left(\sqrt{2}\right)$ *d)* $f(x+h)$ *e)* $f\left(\frac{a}{5}\right)$

a) Si
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$
$$f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 5$$
$$f(2) = 12 - 4 + 5$$
$$\therefore \quad f(2) = 13$$

b) Si
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 5$$
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{12}{9} + \frac{4}{3} + 5 = \frac{12 + 12 + 45}{9}$$
$$= \frac{69}{9} = \frac{23}{3}$$
$$\therefore \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = 7\frac{2}{3}$$

c) Si
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$
$$f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2}) + 5$$
$$f(\sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2} + 5 = 11 - 2\sqrt{2}$$
$$\therefore \quad f(\sqrt{2}) = 8.1715$$

d) Si
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$
$$f(x+h) = 3(x+h)^2 - 2(x+h) + 5$$
$$f(x+h) = 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 5$$
$$\therefore \quad f(x+h) = 3x^2 - 2x + 5 + 2h(3x - 1) + 3h^2$$

e) Si
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$
$$f\left(\frac{a}{5}\right) = 3\left(\frac{a}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{5}\right) + 5$$
$$f\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{3a^2}{25} - \frac{2a}{5} + 5$$
$$\therefore \quad f\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{3a^2 - 10a + 125}{25}$$

La notación de la función es $f = \{(x, 3x^2 - 2x + 5) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $\mathbb{R}$ representa al conjunto de los números reales.

2 Dada $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 42$, demuestra que:

a) $f(1) = 30$

b) $f(7) = 0$

c) $f(0) = -\frac{7}{2} f(3)$

d) $3f(-1) = -4f(6)$

e) $f(9) = 5f(1)$

f) $f(z + 2) = z^3 - z^2 - 22z + 10$

Solución

a) Si
$$f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 42$$
$$f(1) = (1)^3 - 7(1)^2 - 6(1) + 42$$
$$f(1) = 1 - 7 - 6 + 42$$
$$\therefore \quad f(1) = 30$$
Lo Cual Debimos Demostrar (*L. C. D. D.*)

b) Si
$$f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 42$$
$$f(1) = (7)^3 - 7(7)^2 - 6(7) + 42$$
$$f(1) = 343 - 343 - 42 + 42$$
$$\therefore \quad f(7) = 0$$
L. C. D. D.

c) Si

$$f(x)=x^3-7x^2-6x+42$$
$$f(0)=(0)^3-7(0)^2-6(0)+42$$
$$f(0)=42$$

$$f(3)=(3)^3-7(3)^2-6(3)+42$$
$$f(3)=27-63-18+42$$
$$f(3)=-12$$

Como:

$$f(0)=-\frac{7}{2}f(3)$$
$$42=-\frac{7}{2}(-12)$$
$$42=42$$
$$\therefore\ f(0)=-\frac{7}{2}f(3) \qquad L.\ C.\ D.\ D.$$

d) Si

$$f(x)=x^3-7x^2-6x+42$$
$$f(-1)=(-1)^3-7(-1)^2-6(-1)+42$$
$$f(-1)=-1-7+6+42$$
$$f(-1)=40$$

$$f(6)=(6)^3-7(6)^2-6(6)+42$$
$$f(6)=216-252-36+42$$
$$f(6)=-30$$

Como:

$$3f(-1)=-4f(6)$$
$$3f(40)=-4(-30)$$
$$120=120$$
$$\therefore\ 3f(-1)=-4f(6) \qquad L.\ C.\ D.\ D.$$

e) Si

$$f(x)=x^3-7x^2-6x+42$$
$$f(9)=(9)^3-7(9)^2-6(9)+42$$
$$f(9)=729-567-54+42$$
$$f(9)=150$$

$$f(1)=(1)^3-7(1)^2-6(1)+42$$
$$f(1)=1-7-6+42$$
$$f(1)=30$$

Como:

$$f(9)=5f(1)$$
$$150=5(30)$$
$$150=150$$
$$\therefore\ f(9)=5f(1) \qquad L.\ C.\ D.\ D.$$

f) Si

$$f(x)=x^3-7x^2-6x+42$$
$$f(z+2)=(z+2)^3-7(z+2)^2-6(z+2)+42$$
$$f(z+2)=z^3+6z^2+12z+8-7(z^2+4z+4)-6z-12+42$$
$$f(z+2)=z^3+6z^2+12z+8-7z^2-28z-28-6z-12+42$$
$$\therefore\ f(z+2)=z^3-2^2-22z+10 \qquad L.\ C.\ D.\ D.$$

3 Si $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta$, encuentra:

a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(\pi)$

d) $f(2\pi)$

Solución

a) Si $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} 45^\circ + \cos 90^\circ$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Si $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \cos 2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} 60^\circ + \cos 120^\circ$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.3660$$

c) Si $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta$

$$f(\pi) = \operatorname{sen}\pi + \cos 2\pi$$

$$f(\pi) = \operatorname{sen} 180^\circ + \cos 360^\circ$$

$$f(2\pi) = 0 + 1$$

$$\therefore \quad f(\pi) = 1$$

d) Si $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta$

$$f(2\pi) = \operatorname{sen} 2\pi + \cos 2(2\pi)$$

$$f(2\pi) = \operatorname{sen} 360^\circ + \cos 720^\circ$$

$$f(2\pi) = 0 + 1$$

$$\therefore \quad f(2\pi) = 1$$

4 Dada $f(z) = \frac{1}{z}$, demuestra que:

a) $f(2) - f(b) = f\left(\frac{2b}{b-2}\right)$

b) $f(x+h) - f(x) = -\frac{h}{x^2 + xh}$

Solución

a) Si $f(z)=\dfrac{1}{z}$

$$f(2)=\frac{1}{2}$$

$$f(b)=\frac{1}{b}$$

$$f\left(\frac{2b}{b-2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{2b}{b-2}\right)}$$

$$f(2)-f(b)=f\left(\frac{2b}{b-2}\right)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{b}=\frac{1}{\left(\frac{2b}{b-2}\right)}$$

$$\frac{b-2}{2b}=\frac{1}{\left(\frac{2b}{b-2}\right)}$$

$$\frac{\frac{b-2}{b-2}}{\frac{2b}{b-2}}=\frac{1}{\left(\frac{2b}{b-2}\right)}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{2b}{b-2}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{2b}{b-2}\right)}$$

$$\therefore\quad f(2)-f(b)=f\left(\frac{2b}{b-2}\right)\qquad L.C.D.D.$$

b) Si $f(z)=\dfrac{1}{z}$

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x+h)=\frac{1}{(x+h)}$$

$$f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}$$

$$\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}=\frac{h}{x^2+xh}$$

$$\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=-\frac{h}{x^2+xh}$$

$$\frac{x-x-h}{x^2+xh}=-\frac{h}{x^2+xh}$$

$$-\frac{h}{x^2+xh}=-\frac{h}{x^2+xh}$$

$$\therefore\quad f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}\qquad L.C.D.D.$$

5 Dada $f(x)=3^x$, demuestra que:

a) $f(0)=1$

b) $f(x+1)-f(x)=2f(x)$

c) $f(y)\cdot f(z)=f(y+z)$

d) $f(x+2)-f(x-1)=\dfrac{26}{3}f(x)$

e) $\dfrac{f(x+4)}{f(x-1)}=f(5)$

Solución

a) Si $f(x) = 3^x$

$f(0) = 3^0 \qquad \therefore \quad f(0) = 1 \qquad L.C.D.D.$

b) Si $f(x) = 3^x$

$f(x+1) = 3^{(x+1)}$

$$f(x+1) - f(x) = 2f(x)$$
$$3^{(x+1)} - 3^x = 2f(x)$$
$$3^x(3-1) = 2f(x)$$
$$3^x(2) = 2f(x)$$
$$2f(x) = 2f(x)$$
$$\therefore \quad f(x+1) - f(\lambda) = 2f(x) \qquad L.C.D.D.$$

c) Si $f(x) = 3^x$

$f(y) = 3^y$

$f(z) = 3^z$

$f(y+z) = 3^{(y+z)}$

$$f(y)\cdot f(z) = f(y+z)$$
$$(3^y)(3^z) = 3^{(y+z)}$$
$$3^{(y+z)} = 3^{(y+z)}$$
$$\therefore \quad f(y)\cdot f(z) = f(y+z) \qquad L.C.D.D.$$

d) Si $f(x) = 3^x$

$f(x+2) = 3^{(x+2)}$

$f(x-1) = 3^{(x-1)}$

$$f(x+2) - f(x-1) = \frac{26}{3}f(x)$$
$$3^{(x+2)} - 3^{(x-1)} = \frac{26}{3}f(x)$$
$$3^x(3^2 - 3^{-1}) = \frac{26}{3}f(x)$$
$$3^x\left(9 - \frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3}f(x)$$
$$3^x\left(\frac{26}{3}\right) = \frac{26}{3}f(x)$$
$$\frac{26}{3}f(x) = \frac{26}{3}f(x)$$
$$\therefore \quad f(x+2) - f(x-1) = \frac{26}{3}f(x) \qquad L.C.D.D$$

e) Si $f(x) = 3^x$

$f(x+4) = 3^{(x+4)}$

$f(x-1) = 3^{(x-1)}$

$f(5) = 3^5 = 243$

$$\frac{f(x+4)}{f(x-1)} = f(5)$$
$$\frac{3^{(x+4)}}{3^{(x-1)}} = 243$$
$$\frac{\cancel{3^x}(3^4)}{\cancel{3^x}(3^{-1})} = 243$$
$$\frac{81}{\frac{1}{3}} = 243$$
$$243 = 243$$
$$\therefore \quad \frac{f(x+4)}{f(x-1)} = f(5) \qquad L.C.D.D.$$

6 ●●· Dada $f(x)=\log\frac{1}{y}$, demuestra que $f(10^7)=-7$.

Solución

$$\text{Si } f(y)=\log\frac{1}{y}$$

$$f(10^7)=\log\frac{1}{10}\text{,}$$

$$f(10^7)=\log 1-\log 10^7$$

$$f(10^7)=\log 1-7\log 10$$

$$f(10^7)=0-7(1)=-7 \qquad \therefore \quad f(10^7)=-7 \qquad L.C.D.D.$$

7 ●●· Dada $f(y)=\frac{1}{\sqrt{ax}}$, encuentra $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Solución

$$\text{Si} \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax}}$$

$$f(x+h)=\frac{1}{\sqrt{a(x+h)}}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{\sqrt{a(x+h)}}-\frac{1}{\sqrt{ax}}}{h}=\frac{\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a(x+h)}}{\sqrt{ax}\sqrt{a(x+h)}}}{h}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a(x+h)}}{h\sqrt{ax}\sqrt{a(x+h)}}\right)\left(\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{a(x+h)}}{\sqrt{ax}+\sqrt{a(x+h)}}\right)$$

$$=\frac{ax-a(x+h)}{hax\sqrt{a(x+h)}+h\sqrt{ax}\,a(x+h)}=\frac{\cancel{ax}-\cancel{ax}-\cancel{ah}}{\cancel{ah}\left[x\sqrt{a(x+h)}+\sqrt{ax}(x+h)\right]}$$

$$=-\frac{1}{x\sqrt{a(x+h)}+\sqrt{ax}\,(x+\mathbf{h})}$$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{x\sqrt{a(x+h)}+\sqrt{ax}(x+h)}$$

8 ●●· Dada $f(x)=\sqrt{2x}$, determina:

a) $f\left(\frac{9}{2}\right)$

b) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Solución

a) Si $f(x)=\sqrt{2x}$

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=\sqrt{2\left(\frac{9}{2}\right)}=\sqrt{9}=3$$

$$\therefore\ f\left(\frac{9}{2}\right)=3$$

b) Si

$$f(x)=\sqrt{2x}$$

$$f(x+h)=\sqrt{2(x+h)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(\frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}\right)$$

$$=\frac{2(x+h)-2x}{h\left(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}\right)}=\frac{\cancel{2x}+2\cancel{h}-\cancel{2x}}{\cancel{h}\left(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}$$

$$\therefore\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}$$

9 ••• Dada la función $f=\{(0,1),(1,3),(2,5),(3,7),(4,9),(5,11)\}$, escribe el dominio y la regla de correspondencia para la función.

Solución

Sea $Domf=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $Ranf=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; la regla de correspondencia que satisface al conjunto de pares ordenados y que define a la función es $f(x)=2x+1$.

Cuando x toma valores del $Domf$, se tiene:

$$\begin{aligned} x=0;&\quad f(0)=2(0)+1=1\\ x=1;&\quad f(1)=2(1)+1=3\\ x=2;&\quad f(2)=2(2)+1=5\\ x=3;&\quad f(3)=2(3)+1=7\\ x=4;&\quad f(4)=2(4)+1=9\\ x=5;&\quad f(5)=2(5)+1=11 \end{aligned}$$

La notación de la función con la regla de correspondencia es: $f=\{(x,2x+1)\mid\in Domf\}$

10 ••• Escribe el conjunto de pares ordenados que forman parte de la función f y obtén el dominio y rango de la función si la regla de correspondencia está dada por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Solución

Si x se sustituye por 3 la expresión no es real, es decir la función no está definida para $x=3$.

Domino (x)	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	4	5	6
Rango (f(x))	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	7	8	9

El dominio de la función está dado por el conjunto de los números reales, excepto para $x = 3$.

El rango de la función también está dado por el conjunto de los números reales, sólo que no se define para $x = 3$.

EJERCICIO 2

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas.

1. Define el concepto de relación.
2. Cita tres ejemplos de relación.
3. Define el concepto de función.
4. Cita cinco ejemplos de función.
5. Explica el significado del símbolo $f(x)$.
6. ¿Qué es una constante absoluta o numérica?
7. ¿Qué es una constante arbitraria o parámetro?
8. ¿Qué es una variable independiente o argumento?
9. ¿Qué es una variable dependiente o función?
10. ¿A qué se denomina intervalo de una variable?
11. ¿Qué es amplitud del intervalo?
12. ¿Cuál es la notación y el significado de un intervalo cerrado?
13. ¿Cuál es la notación y el significado de un intervalo abierto?
14. ¿Cuál es la notación y el significado de un intervalo infinito?
15. Explica qué son el dominio y el rango de una función.
16. ¿En qué consiste la regla de asignación o correspondencia?

II. En equipo resuelvan los siguientes problemas y en plenaria discutan sus resultados.

1. Dada $f(x) = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$, demuestra que:

   a) $f(1) = 17$
   b) $f(3) = -35$
   c) $2f\left(\frac{1}{2}\right) = 5f(2)$
   d) $f(t+1) = -2t^3 - 9t^2 + 17$
   e) $f(-1) = -3$
   f) $f(-2) = -1f(0)$

2. Si $f(\theta) = \tan 2\theta + \cot \theta$, demuestra que:

   a) $f(0°) = \infty$
   b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$
   c) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$
   d) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}$

3. Dada $\phi(z) = \text{sen } z$, demuestra que $\phi(z + 2h) - \phi(z) = 2 \cos (z + h) \text{ sen } h$

4. Dada $G(x) = 5^x$, demuestra que:

   a) $G(0) = 1$

   b) $G(x + 1) - G(x) = 4G(x)$

   c) $G(x + 3) - G(x - 1) = \dfrac{624}{5}G(x)$

   d) $\dfrac{G(x+2)}{G(x-2)} = G(3)$

   e) $G(z) \cdot G(y) = G(z + y)$

5. Dada $f(x) = x^2 - x - 2$, demuestra que:

   $f(x + h) - f(x) = h(2x + h - 1)$

6. Dada $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, demuestra que:

   $f(y) + f(z) = f\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$

7. Si $f(y) = y^2 - y$, demuestra que $f(y + 1) = f(-y)$.

8. Dada $f(x) = \sqrt{2x+a}$, encuentra:

   a) $f(2x + a)$

   b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

   c) $f\left(\dfrac{3a}{2}\right)$

9. Dada $f(y)$ $\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}$, encuentra: $\dfrac{f(y+h) - f(y)}{h}$.

10. Dada $f(x) = \sqrt{a+x}$, determina $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

11. Dada $f(x) = \log x^2$, demuestra que:

    $f(x+h) - f(x) = 2\log\left(\dfrac{x+h}{x}\right)$

12. Escribe cada uno de los siguientes intervalos en la notación de desigualdad y representa su gráfica.

    a) $[-7,5]$

    b) $(-4,4]$

    c) $(-6,8)$

    d) $[-4,\infty)$

    e) $[-5,5)$

    f) $(-\infty,3)$

13. Escribe cada una de las siguientes desigualdades en la notación de intervalos y representa su gráfica.

    a) $-4 < x \leq 8$

    b) $-6 \leq x < 7$

    c) $-3 \leq x \leq 3$

    d) $x \leq -3$

    e) $-9 < x < 6$

    f) $x > 3$

14. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones? Para aquellos que lo son, identifica el dominio y el rango e ilustra con un diagrama.

a) $\{(4,2), (3,1), (0,0), (-1,3), (-3,7)\}$

b) $\{(3,2), (3,0), (4,1), (7,3)\}$

c) $\{(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$

d) $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right),\left(\frac{7}{2},\frac{9}{4}\right)\right\}$

e) $\left\{\left(0,\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right),\left(\sqrt{5},\sqrt{7}\right),\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)\right\}$

15. Dada $f(x) = x^2 - 2x$, determina el conjunto finito de pares ordenados para $x = \{1, 2, 3, 4, -1, -2, -3\}$

16. Determina el dominio y rango de la función de x para:

a) $y = 3x + 2$ *c)* $y = \sqrt{25 - x^2}$ *e)* $y = x^3$

b) $y = \sqrt{x^2 - 16}$ *d)* $y = \frac{x}{4}$ *f)* $y = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$

17. Si f es una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y con regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 2x + 2$, determina:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *d)* $f\left(\frac{3}{2}\right)$ *g)* $f\left(\sqrt{a}\right)$

b) $f(-1)$ *e)* $f(-3)$ *h)* $f\left(\sqrt{2}\right)$

c) $f(x + a)$ *f)* $f(x - h)$ *i)* $f\left(\sqrt{x + h}\right)$

18. Dada la función $f = \{(1,-2), (2,1), (3,6), (4,13), (-1,-2)\}$, determina el dominio y la regla de correspondencia.

19. Determina el dominio y el rango de la función $f(x) = -x^2$.

20. Determina el dominio y el rango para la función $f = \{(x, y) \mid y = 4x - 5\}$.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Clasificación de los diferentes tipos de funciones

Clasificación de las funciones

La clasificación de las funciones depende del número de variables de las cuales dependa la variable y, como explicaremos a continuación.

Funciones de una variable. Cuando el valor de la variable y (es decir, la función) depende de una sola variable x, tenemos una función de una sola variable independiente.

Ejemplos

1. Si un cuerpo móvil desarrolla una velocidad constante, el espacio recorrido depende de la duración del movimiento; es decir, el tiempo es la variable independiente y el espacio recorrido la variable dependiente.
2. El costo del servicio de agua depende del volumen de metros cúbicos gastados.

Funciones de varias variables. Cuando el valor de la variable y depende de los valores de dos o más variables, tenemos una función de varias variables independientes.

Ejemplos

1. El área de un triángulo depende de la base y de su altura. Por lo tanto, tenemos una función de dos variables, es decir, $A = f(b, h)$.
2. El volumen de una caja depende de su longitud, ancho y altura. De este modo, tenemos una función de tres variables, es decir, $V = f(l, a, h)$.
3. Al invertir un capital, su interés depende de la tasa, del capital y del tiempo de inversión. Así, tenemos una función de tres variables, es decir, $I = f(T, C, t)$.

Funciones algebraicas y trascendentes. Están formadas por un número finito de operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, elevación de potencias y extracción de raíces).

Ejemplo

$$f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 3)^2}{\sqrt{2x+1}}$$

Una función **trascendente** es aquella que no cumple con las condiciones de una función algebraica; se consideran como funciones trascendentes las trigonométricas, trigonométricas inversas (también llamadas circulares y circulares inversas, respectivamente), las exponenciales y las logarítmicas.

Ejemplos

Funciones trascendentes	Nombre específico de la función
$f(x) = \tan x$	función trigonométrica o circular
$f(x) = \text{arcsen } 2x$	función trigonométrica inversa o circular inversa
$f(x) = 10^{3x^2}$	función exponencial
$f(x) = \ln(2x + 3)$	función logarítmica

Funciones algebraicas

Las funciones algebraicas se dividen en funciones **racionales** e **irracionales**, según las operaciones a las que estén sometidas las variables.

Función racional. Es aquella cuyas variables no contienen exponentes fraccionarios ni se encuentran bajo signo radical; también lo son las funciones que se expresan como el cociente de dos funciones polinomiales.

Ejemplos

$$f(x) = bx^2 \qquad f(x) = 11ax^{-5} \qquad f(x) = \frac{x^3+27}{x+3}$$

Función irracional. Es aquella en la cual alguna de las variables tiene exponentes fraccionarios o se encuentra bajo signo radical.

Ejemplos

$$f(x) = \sqrt{3x^2-5x+8} \qquad f(x) = ax^{\frac{2}{3}} \qquad f(x) = \sqrt{x^2-64}$$

Funciones enteras y fraccionarias

Las funciones racionales se dividen en **enteras** y **fraccionarias**.

Funciones enteras. Son aquellas en cuyo denominador no aparece ninguna variable y no están afectadas por exponentes negativos.

Ejemplos

$$f(x) = 3x^2 + 5 \qquad f(x) = x^2 - 4x + 8 \qquad f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Cuando la función racional es entera se denomina también **polinomial**.

Función polinomial. Sea (f) una función definida por

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_nx^{n-n}$, donde n es un número entero positivo y $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales diferentes de cero, por lo que (f) es una función polinomial de enésimo grado.

Tipos de función polinomial

La función polinomial de grado uno (primer grado), se llama **función lineal**. Por ejemplo,

$$f(x) = 5x - 2 \qquad f(x) = mx + b$$

La función polinomial de grado dos (segundo grado), se llama **función cuadrática**. Por ejemplo,

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 6 \qquad f(x) = ax^2 + bx + c$$

La función polinomial de grado tres (tercer grado), se llama **función cúbica**. Por ejemplo,

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x + 8 \qquad f(x) = x^3 - 5x + 7$$

A la función lineal que se define por $f(x) = x$, se le llama **función idéntica** (función identidad).

Funciones fraccionarias. Son aquellas que tienen alguna variable como denominador o están afectadas por un exponente negativo.

Ejemplos

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3x+7}}{5x^2+x} \qquad f(x) = 3x^{-2}+1 \qquad f(x) = (ax^2-bx)^{-3}$$

Funciones explícitas y funciones implícitas

Una **función explícita** es aquella en la cual la variable independiente está involucrada directamente con las operaciones indicadas, que al efectuarse determinan el valor de la función. Es decir, la variable dependiente está despejada, se expresa como $y = f(x)$.

Ejemplos

$y = 7x - 4$ "y es función explícita de x"

$y = \dfrac{x+a}{x-a}$ "y es función explícita de x"

Una **función explícita** puede expresarse también en términos de una sola variable. Por ejemplo,

$$6x^2 + x - 4 = 0.$$

Una función es implícita cuando se da una relación entre la variable independiente y la variable dependiente por medio de una ecuación no resuelta para ninguna de las variables. Se expresa como $f(x,y) = 0$.

Ejemplos

$$7x - y - 4 = 0$$
$$x + 2x^2y - 3xy^2 - 5y = 10$$
$$x^2 = 9y - xy$$

Las ecuaciones se definen como ***y* función implícita de *x***, pero también es evidente que ***x* es función implícita de *y***, ya que a veces es posible resolver la función implícita con respecto a una de las variables, dando lugar a una función explícita.

Ejemplos

$x^2 - 4y = 0\}$ Función implícita $\{x^2 - 4y = 0$

$-4y = -x^2$ $\qquad$ $x^2 = 4y$

$y = \dfrac{x^2}{4}\Big\}$ "y es una función explícita de x" $\qquad$ $x = \pm 2\sqrt{y}\Big\}$ "x es la función explícita de y"

A continuación, mediante un diagrama se resumen las funciones estudiadas hasta este punto.

Resumen de funciones

- Funciones reales
  - Funciones algebraicas
    - Racional
      - Polinomial
        - Lineal
          - Idéntica
        - Cuadrática
        - Cúbica
        - Etcétera
    - Irracional
  - Función trascendente
    - Logarítmica
    - Exponencial
    - Trigonométrica o Circular
      - Inversa

Otros tipos de funciones y algunas funciones especiales

Función simple. Es aquella en la cual la relación de la variable dependiente con respecto a la variable independiente se indica con una sola operación.

Ejemplos

$$y = x^3 \qquad y = \cos x \qquad y = \log x$$

Función compuesta. Si f y g son funciones tales que el rango de f está contenido en el dominio de g, entonces la función compuesta de f con g se denota mediante el símbolo $(f \circ g)$ y es una función que se obtiene al colocar el valor de $g(x)$ como variable independiente de la función f. Es decir, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Ejemplo

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = 3x - 2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3x-2}$$

También $f + g$, $\dfrac{f}{g}$ y f^g son funciones compuestas.

Función inversa. Sean f y g funciones inversas; si $f(g(x)) = x$ para cada valor de la variable independiente en el dominio de g, y $g(f(x)) = x$ para cada valor de la variable en el dominio de f.

En las funciones inversas f y g, el rango (recorrido) de g debe ser igual al dominio de f y recíprocamente.

La notación de la función inversa consiste en sustituir f por g^{-1}, que se lee "inversa de g" y g por f^{-1}, que se lee "inversa de f".

Ejemplo

$$f(x) = y = \sqrt{2x-3} \text{ es inversa de } f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2} = g$$

Función de función. Es una función en la que y no se define directamente como función de x, sino que se da como función de otra variable u, la cual se define como función de x por medio de u.

Ejemplo

Si $y = u^2$, dado que $u = 1 + 2x$, se establece que y es función de función de x, es decir $y = (1 + 2x)^2$.

Función par. Es aquella función f en la que todos los valores de la variable independiente llamada dominio de f satisfacen la condición $f(-x) = f(x)$. La gráfica de una función por siempre es simétrica con respecto al origen de coordenadas en el plano cartesiano.

Ejemplo

Si $f(x) = 5x^4 + 9x^2 - 4$, entonces:

$$f(-x) = 5(-x)^4 + 9(-x)^2 - 4 = 5x^4 + 9x^2 - 4 = f(x).$$

Función impar. Es aquella función f en la que todos los valores de la variable independiente llamada dominio de f satisfacen la condición $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas en el plano cartesiano.

Ejemplo

Si $f(x) = 2x^3 - 7x$, entonces:

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 7(-x) = -2x^3 + 7x = -f(x)$$

Función constante. Es aquella en la cual el rango de la función f consta de un solo número real cualquiera.

Ejemplos

Si $f(x) = c$, entonces:

$$f(\pi) = c \qquad f(1) = c \qquad f(0) = c \qquad f(-3) = c$$

Función escalón o mayor entero. Se determina por la ecuación $f(x) = [x]$, en donde el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, y su rango es el conjunto de los enteros como regla de correspondencia, es decir, $[x]$ es la parte entera no mayor que x.

Ejemplos

Si $f(x) = [x]$, entonces:

$$\begin{aligned} [4.53] &= 4 \\ [9] &= 9 \\ [0] &= 0 \\ [-2.31] &= -3 \\ [-3.5] &= -4 \\ [-7] &= -7 \end{aligned}$$

Función signo. Es aquella cuya notación es **Sgn x** que se lee "**signo de x**"; se determina por la ecuación:

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ \ \ 0 \text{ si } x = 0 \\ \ \ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Función continua. Una función es continua en un intervalo (a,b) cuando todo valor de x tiene asignado un valor de y. La función no se rompe y puede dibujarse mediante un solo trazo. La definición formal se verá más adelante.

Función discontinua. Una función es discontinua en un intervalo c si no existe un valor de y para cada valor de x. La función se rompe, no se puede dibujar en un solo trazo. La definición formal se verá más adelante.

Función exponencial. Es aquella en la cual la variable independiente se ubica como exponente de una constante positiva denominada *base*; se denota por la ecuación $f(x) = a^x$.

Función logaritmo. Es aquella que se afecta por un logaritmo de base a. Es la inversa de la función exponencial con la misma base; se denota por la ecuación $f(x) = \log_a x$.

Función trigonométrica circular. Es aquella cuyo valor depende de un ángulo en la expresión trigonométrica del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante; se denota con:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x & f(x) = \cot x \\ f(x) = \cos x & f(x) = \sec x \\ f(x) = \tan x & f(x) = \csc x \end{array}$$

Función trigonométrica inversa circular. Es aquella cuyo valor del ángulo depende del valor de una función circular directa; se denota con:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{arcsen} x & f(x) = \operatorname{arccot} x \\ f(x) = \arccos x & f(x) = \operatorname{arcsec} x \\ f(x) = \arctan x & f(x) = \operatorname{arccsc} x \end{array}$$

O bien:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x & f(x) = \cot^{-1} x \\ f(x) = \cos^{-1} x & f(x) = \sec^{-1} x \\ f(x) = \tan^{-1} x & f(x) = \csc^{-1} x \end{array}$$

Función valor absoluto. Es aquella cuyo dominio es el conjunto de los números reales y su rango se limita a los números reales positivos. Esta función se denota con $f(x) = |x|$. Se define por la siguiente regla de correspondencia,

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si } \leq 0 \\ x \text{ si } > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 3

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas.

1. Cita tres ejemplos de funciones de una sola variable.
2. Cita tres ejemplos de funciones de dos o más variables.
3. Define función algebraica.
4. Define función trascendente.
5. ¿Qué se entiende por función racional?
6. ¿Qué se entiende por función irracional?
7. ¿Cómo se expresa una función entera?
8. Define función polinomial.
9. Si el grado de una función polinomial es 4, ¿qué nombre recibe?
10. ¿Cómo se expresa una función fraccionaria?
11. Define función explícita.
12. Define función implícita.
13. Escribe el concepto de función simple.
14. ¿Qué es una función compuesta?
15. ¿A qué se le llama función de función?
16. Define función par.
17. Define función impar.
18. ¿Qué es una función inversa?
19. ¿Cómo se determina una función escalón o mayor entero?
20. Explica la diferencia entre función continua y función discontinua.
21. Define función exponencial.
22. Desarrolla el concepto de función logarítmica.
23. ¿Qué es una función trigonométrica?
24. ¿Qué es una función trigonométrica inversa?
25. Define función valor absoluto.

II. Clasifica las siguientes funciones.

a) $y = x^5 - 3x^3 + 2x$

b) $y = 4^{2x}$

c) $y = \cos 2x$

d) $y = \sqrt{x^3 - 5}$

e) $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x + 2}$

f) $y^2 + xy + x^2 = 0$

g) $x^2 - xy = 2$

h) $y = \sec x$

i) $f(x) = [-5.25]$

j) $f(2) = c$

k) $f(x) = 4x$

l) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

m) $f(x) = [x + 2]$

n) $f(x) = \text{Sgn}\, x^2$

ñ) $g(x) = \log_a 5x$

o) $f(x) = x^2 + 4$

p) $f(x) = x^3 - 5x$

q) $f(x) = x$

r) $f(x) = \tan^{-1} 2x$

s) $f(x) = \sqrt{u}$ y $u = x^2 + 1$

t) $f(g(x)) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

u) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

v) $y = \log x$

w) $f(x) = \dfrac{(ax^2 - bx)^3}{\sqrt{x^2 + 5}}$

x) $f(x) = mx^{-1}$

y) $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$

z) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{4}$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Análisis gráfico de las funciones

Gráfica de una función

Generalmente, para construir la gráfica de una función se emplea el sistema de coordenadas rectangulares; los valores del dominio se ubican en el eje horizontal (eje x) y los valores del rango se ubican en el eje vertical (eje y).

La gráfica es el conjunto de puntos cuyas coordenadas en el eje x corresponden a los valores de la variable independiente (dominio) y de la variable dependiente (rango).

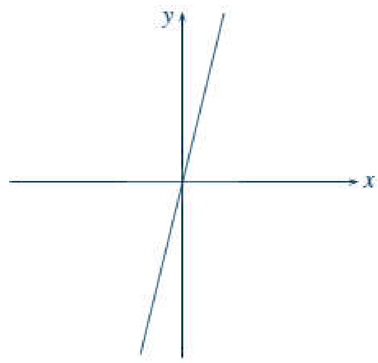
Las representaciones gráficas de las ecuaciones con dos variables, analizadas en geometría analítica, son gráficas de funciones en las cuales una de las variables se considera función de la otra.

Ejemplo

Representa gráficamente la función $y = 4x$.

Para resolver la función primero se debe elaborar una tabla que contenga valores de x y de y, que permita identificar el dominio y rango de dicha función. Los valores obtenidos serán las coordenadas para ubicar los puntos correspondientes a la gráfica de la función.

x	y
−3	−12
−2	−8
−1	−4
0	0
1	4
2	8
3	12



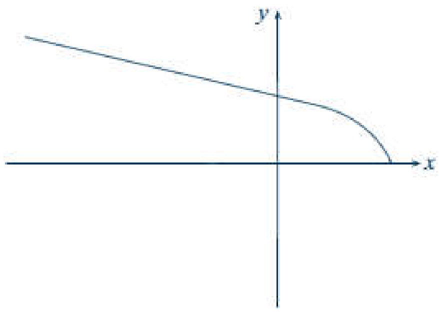
Por lo tanto, la gráfica de f es la recta que biseca los cuadrantes I y III, y que se extiende indefinidamente en las dos direcciones $f(x) = \{(x,y) \mid y = 4x\}$.

Determinación del dominio y rango de funciones mediante la notación para intervalos y representación gráfica

1. Dada la función $y = \sqrt{3-x}$, encuentra el dominio y el rango de f y traza la gráfica correspondiente.

   Para resolver es necesario elaborar una tabla que contenga los valores de x y y, para generar la gráfica correspondiente.

Dominio (x)	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Rango (y)	3	2.82	2.64	2.44	2.23	2	1.73	1.41	1	0	*i*



Al observar la gráfica tenemos que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales menores que o iguales a $3 (x \leq 3)$; este conjunto se denomina **intervalo abierto a la izquierda** y se representa como $(-\infty,3]$. El rango de f es el conjunto de todos los números reales no negativos; este conjunto se denomina **intervalo abierto a la derecha** y se representa como $[0,+\infty)$.

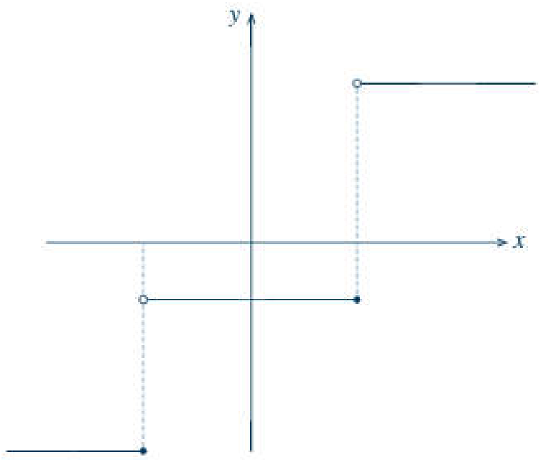
$$\therefore \quad y = \sqrt{3-x}, \text{ es una función irracional}$$

Dado que y contiene un radical, entonces es una función radical que además es continua en su propio dominio.

2. Dada la función $y=\begin{cases}-4 & \text{si } x<-2\\ -1 & \text{si } -2\leq x\leq 2\\ 3 & \text{si } 2<x\end{cases}$, encuentra el dominio y el rango de f y traza la gráfica correspondiente.

Este tipo de función se llama función por partes. En este caso, para elaborar la tabla de valores sólo se consideran los valores de y; debido a que la función asigna los valores de x de acuerdo con cada intervalo dado.

Dominio (x)	$x<-2$	$-2\leq x\leq 2$	$2<x$
Rango (y)	-4	-1	3



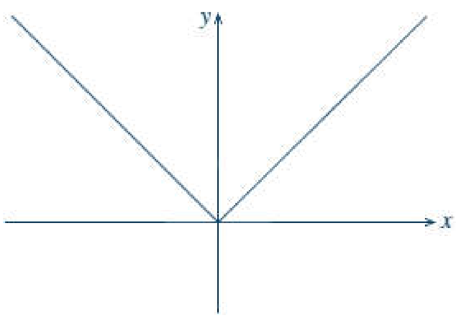
Si observamos la gráfica tenemos que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y que se representa con $(-\infty,+\infty)$; el rango de f consta de los valores -4, -1 y 3. Recuerda que un punto sólido sobre la gráfica indica que el punto está contenido en la misma y que un punto hueco indica que el punto no forma parte de la gráfica.

Funciones que presentan una gráfica como la anterior se denominan funciones escalonadas. Dado que el rango consiste de únicamente números enteros, se llama también función de parte entera.

3. Dada la función $y=|x|$, encuentra el dominio y el rango de g. Traza la gráfica correspondiente.

Al utilizar la definición de función valor absoluta, se elabora una tabla de valores de x contra y. Observa que sin importar el valor que adquiera x, el valor de la función siempre será positivo.

Dominio (x)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Rango (y)	4	3	2	1	0	1	2	3	4



Al observar la gráfica tenemos que el dominio de g es el conjunto de todos los números reales para $0 \leq x < 0$ y se representa por $(-\infty, +\infty)$.

El rango g es el conjunto de todos los números reales no negativos y se representa por $[0, +\infty)$.

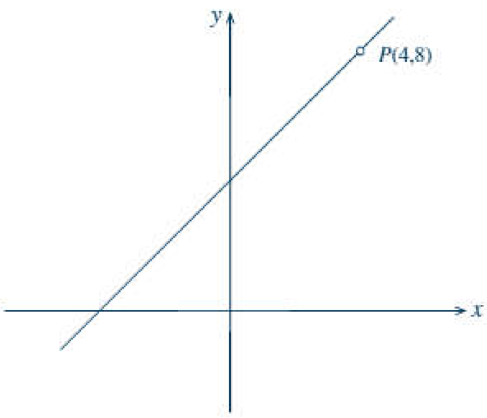
Cuando $x \geq 0$, $y = |x|$ es equivalente a $y = x$, que es la ecuación de una recta que pasa por el origen cuya pendiente es igual a la unidad.

Cuando $x < 0$, $y = |x|$ es equivalente a $y = -x$, que es la ecuación de una recta que pasa por el origen cuya pendiente es igual a menos la unidad.

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, encuentra el dominio y el rango de f. Traza la gráfica correspondiente.

Al elaborar la tabla de valores se observa que la función no está definida cuando $x = 4$, ya que se obtiene el cociente $\dfrac{0}{0}$.

Dominio (x)	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Rango (y)	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	*i*



Al analizar la gráfica f tenemos que para cada valor de x se tiene un valor de y, excepto para $x = 4$. Por lo tanto, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 4 y el rango de f es el conjunto de todos los números reales excepto el 8.

Al factorizar el numerador, tenemos que:

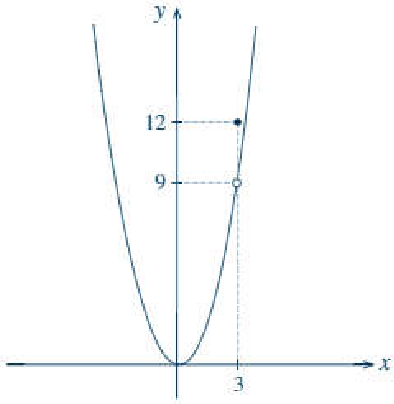
$$y = \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}} = x + 4 \quad \text{si} \quad x = 4.$$

La gráfica contiene a todos los puntos en la recta $y = x + 4$, excepto el punto (4,8). La función anterior es el cociente de dos funciones polinomiales en las cuales no hay exponentes fraccionarios. Por lo tanto es una función racional.

5. Dada la función $H(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 12 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$, encuentra el dominio y el rango de H. Traza la gráfica correspondiente.

Para resolver la función debemos elaborar una tabla de valores de x y y considerando cada uno de los casos que plantea la función por partes.

Dominio (x)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Rango (y)	16	9	4	1	0	1	4	12	16



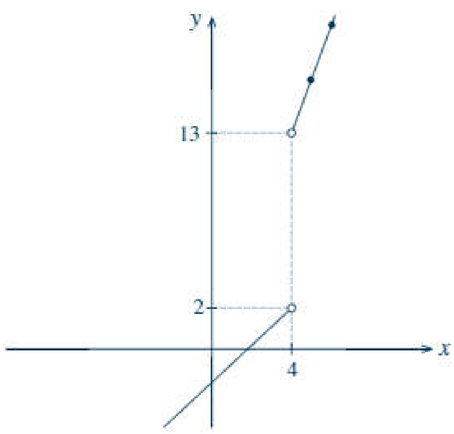
Estudiando la gráfica H tenemos que consta del punto $P(3, 12)$ y de todos los puntos en la parábola $y = x^2$, excepto el punto (3,9), ya que $x \neq 3$.

La función H está definida para todos los valores de x, por lo que el dominio de H es $(-\infty, +\infty)$ y el rango de H consta de todos los números reales no negativos, es decir $[0, +\infty)$.

6. Dada la función $G(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < 4 \\ 3x+1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$, encuentra el dominio y el rango de G. Traza la gráfica correspondiente.

Dado que ésta también es una función por partes, realizamos el mismo proceso que en el ejemplo anterior; considerando en este caso todos los intervalos para el dominio de la función.

	Para $y = x - 2$								Para $y = 3x + 1$				
Dominio (x)	−2	−1	0	1	2	3	4		4	5	6	7	8
Rango (y)	−4	−3	2	−1	0	1	2		13	16	19	22	25

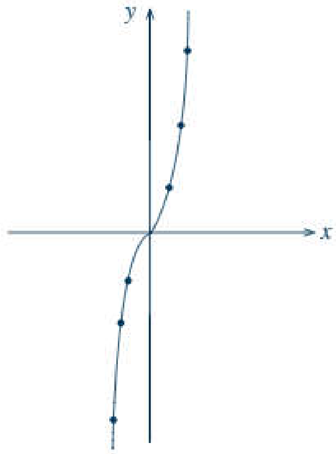


Si observamos la gráfica de G tenemos que su dominio es el conjunto de todos los números reales y que se representa como $(-\infty,+\infty)$; los valores de y son menores que 2 o mayores que o iguales a 13, por lo que el rango de G es $(-\infty, 2)$ y $[13, +\infty)$. Lo anterior equivale a todos los números reales no contenidos en $[2,13)$.

Debido a la interrupción que existe en el conjunto de valores de G se observa que la gráfica está formada por dos trazos separados. Se dice entonces que la gráfica es discontinua.

7. Dada la función $g(x) = x^3 + x$, encuentra el dominio y el rango de g. Traza la gráfica correspondiente.

Dominio (x)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Rango (y)	−68	−30	−10	−2	0	1	10	30	68

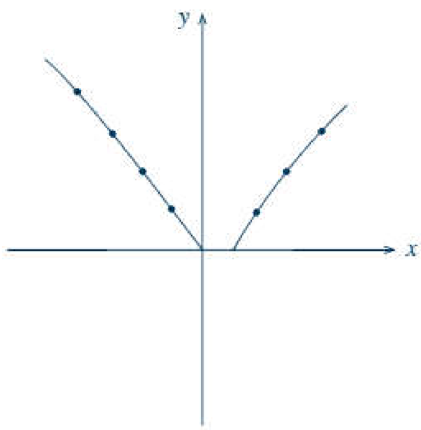


Estudiando la gráfica g tenemos que su dominio es el conjunto de todos los números reales y que se representa con $(-\infty,+\infty)$; el rango de g es el conjunto de todos los números reales y que se representa con $(-\infty,+\infty)$.

Analizando la función g para los valores negativos de x se observa que satisface la condición de que si $g(-x) = -g(x)$, **entonces g es una función impar**, ya que es simétrica con respecto al origen.

8. Dada la función $h(x) = \sqrt{x(x-1)}$, encuentra el dominio y el rango de h. Traza la gráfica correspondiente.

Dominio (x)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Rango (y)	4.47	3.46	2.44	1.41	0	0	1.41	2.44	3.46



Al analizar la gráfica h se observa que $\sqrt{x(x-1)}$ no es un número real para $x\,(x-1)<0$, por lo que el dominio de h es todos los valores de x para los cuales se satisface la condición $x\,(x-1)\geq 0$; esto se cumple si ambos factores son simultáneamente positivos o negativos, esto nos lleva a dos casos particulares:

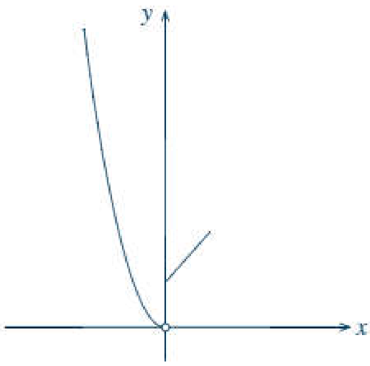
a) Si $x \geq 0$ y $x \geq 1$, denotado por $[1,+\infty)$.

b) Si $x \leq 0$ y $x \leq 1$, denotado por $(-\infty,0)$.

Combinando los resultados de los casos anteriores, tenemos que el dominio de h son los intervalos $(-\infty,0]$ y $[1,+\infty)$; el rango de h es el intervalo $[0,+\infty)$.

9. Dada la función $H(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ 2+x & \text{si } 0\leq x\leq 2 \end{cases}$, determina el dominio y el rango de H. Traza la gráfica correspondiente.

	Para $y=x^2$, $x<0$						Para $y=2+x$, $0\leq x\leq 2$		
Dominio (x)	−5	−4	−3	−2	−1	0	0	1	2
Rango (y)	25	16	9	4	1	0	2	3	4



Al analizar la gráfica H podemos notar que su dominio es $(-\infty,2)$ y el rango es el conjunto de todos los números reales no negativos $[0,+\infty)$. La función es discontinua en $x=0$.

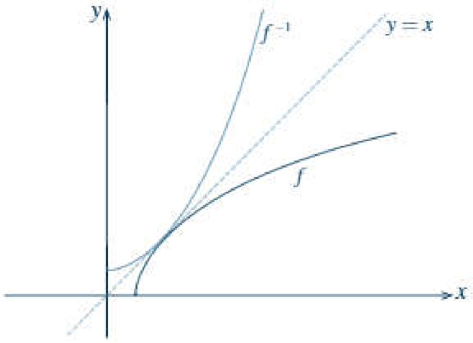
10. Dada la función $f(x)=\sqrt{2x-1}$, encuentra el dominio y el rango de f y traza la gráfica correspondiente; determina la inversa para dicha función, su dominio y rango. Traza la gráfica correspondiente.

Para $f=\sqrt{2x-1}$ tenemos:

Dominio (x)	−3	−2	−1	0	0.5	1	2	3	4	5
Rango (y)	*i*	*i*	*i*	*i*	0	1	1.73	2.23	2.64	3

Para $f^{-1}=\dfrac{x^2+1}{2}$ (función inversa) tenemos:

Dominio (x)	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Rango (y)	5	2.5	1	0.5	1	2.5	5	8.5



La gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica f sobre la recta $y = x$.

Estudiando la gráfica f observamos que su dominio es todos los valores de $x > 0.5$ y se representa como el intervalo $[0.5,+\infty)$. El rango de f es el intervalo $[0,+\infty)$.

De lo anterior se establece que el rango de f^{-1} es igual al dominio de f y el dominio de f^{-1} es igual al rango de f.

Gráfica de la función exponencial y logarítmica

Si elevamos una constante positiva a una potencia variable obtenemos una función exponencial, la cual se representa como:

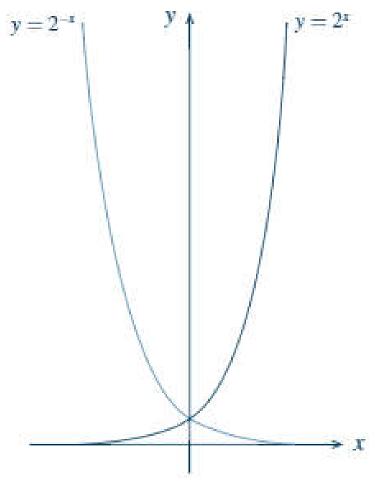
$$y = a^x, \text{ donde } a > 0 \text{ y } a \neq 1.$$

Ejemplo

Dadas las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, traza la gráfica correspondiente.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2^{-x}	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



Estudiando la gráfica de las funciones dadas tenemos que su dominio es $(-\infty,+\infty)$ y su rango $[0,+\infty)$.

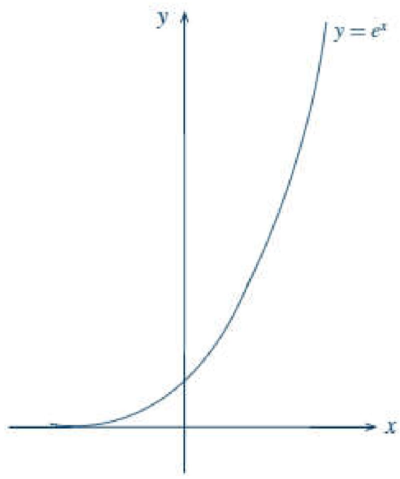
Se observa que una función es reflejo de la otra con respecto al eje de las ordenadas, la primera es creciente, mientras que la segunda es decreciente.

Considerando como base al número irracional e cuyo valor aproximado es $e \approx 2.71828$, traza la gráfica correspondiente a la función $f(x) = e^x$.

Para resolver elaboramos una tabla de valores, de tal forma que:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
e^x	0.049	0.135	0.367	1	e	7.389	20.085	54.598

La gráfica de la función $y = e^x$ arroja que su dominio se representa como $(-\infty,+\infty)$ y su rango con $[0,+\infty)$.



La inversa de la función $y = a^x$ se denomina función logaritmo; podemos reconocer dos tipos de logaritmos, cuya notación es:

a) $\log_a y = x$, se lee el logaritmo de base a del número y es igual a x.

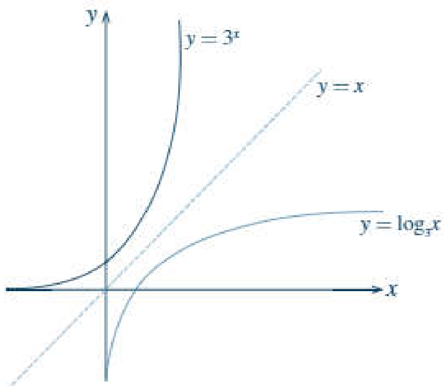
b) $\ln x = b$, se lee el logaritmo natural de x es igual a b.

Ejemplo

Traza la gráfica correspondiente a la función $y = \log 3^k$ que es inversa de $y = 3^x$.

Dominio x	−3	−2	−1	0	1	2	3	Rango $\log_3 x = y$
Rango $3^x = y$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	Dominio x

Observa que el dominio de x es el rango de la función logaritmo y que el rango de una función exponencial es el dominio de x.



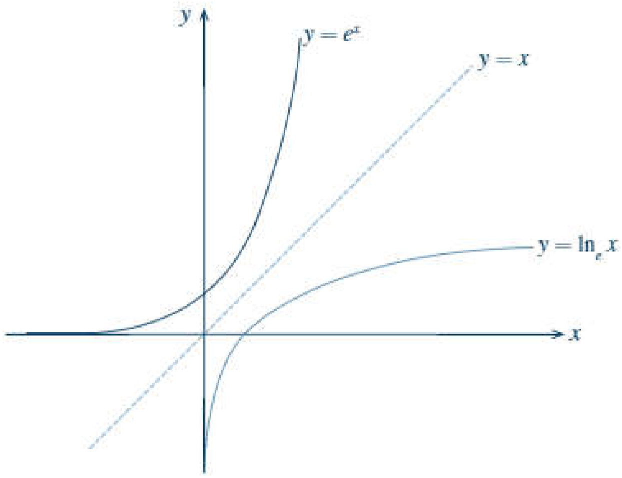
Estudiando la gráfica de las funciones dadas se establece que son continuas y mutuamente inversas.

El dominio de la función $y = \log_3 x$ es $[0,+\infty)$ y su rango es $(-\infty,+\infty)$. Para la función $y = 3^x$ su dominio es $(-\infty,+\infty)$ y su rango es $[0,+\infty)$.

Ejemplo

Traza la gráfica correspondiente a la función $y = \ln_e x$ que es inversa de $y = e^x$.

Dominio (x)	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	Rango ($y = \ln_e x$)
Rango ($y = e^x$)	0.049	0.135	0.367	1	e	7.389	20.085	54.598	Dominio (x)



A partir de los datos graficados se establece que son inversas y continuas.

El dominio de la función $y = \ln_e x$ es $[0,+\infty)$ y su rango es $(-\infty,+\infty)$.

Gráfica de las funciones trigonométricas o circulares

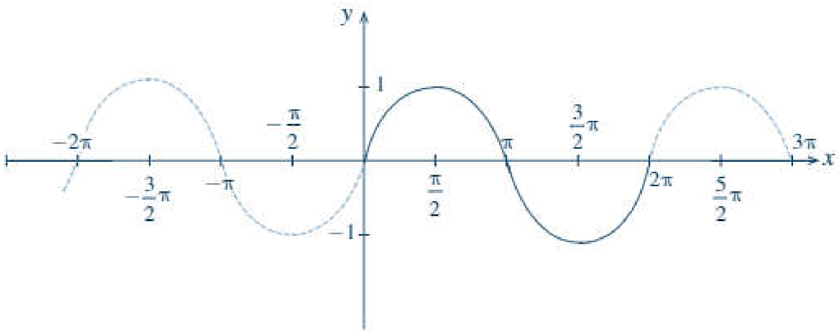
Para obtener la gráfica de una función trigonométrica, por ejemplo $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$, se analiza la variación en el círculo unitario.

Ejemplos

1. Dada la función $f(x) = \text{sen } x$, traza la gráfica correspondiente y encuentra su dominio y rango.

   Para resolver se debe elaborar una tabla de valores de x y y, para ello se eligen aquellos que sean múltiplos del número π.

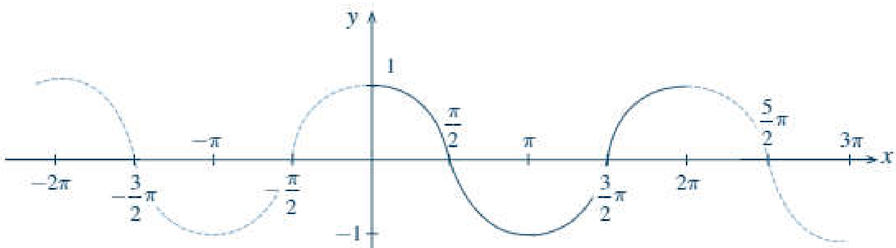
Dominio (x)	$-\frac{3}{2}\pi$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	-2π	$\frac{5}{2}\pi$
Rango (y)	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1



Al observar la gráfica de la función, tenemos que el dominio de $y = \text{sen } x$ es $(-\infty,+\infty)$ y su rango es $[-1,1]$. A partir de la tabla y la gráfica podemos ver que la función se repite cíclicamente cada 2π, se dice entonces que el periodo de la función es 2π. La función de sen x es impar.

2. Dada la función $y = \cos x$ encuentra el dominio y rango. Traza la gráfica correspondiente. Para resolver, seguimos el procedimiento anterior.

Dominio (x)	$-\frac{5}{2}\pi$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$
Rango (y)	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0



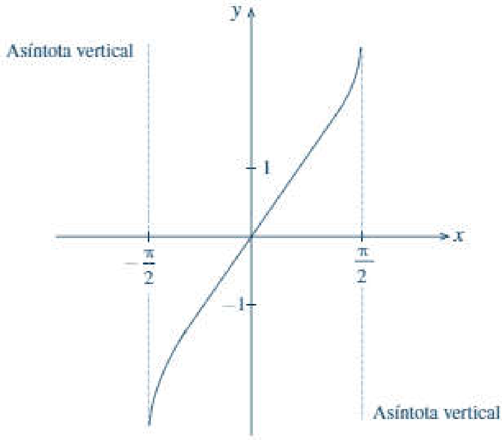
Periodo: 2π
Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $[-1,1]$
$\therefore\ y = \cos x$ es par.

3. Dada la función $y = \tan x$, encuentra el dominio y rango. Traza la gráfica correspondiente. Para resolver la función, se lleva a cabo un procedimiento similar que el de $y = \text{sen } x$,

Dominio (x)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5}{12}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
Rango (y)	∞	−3.73	−1.73	−1	0.577	0	0.577	1	1.732	3.782	∞

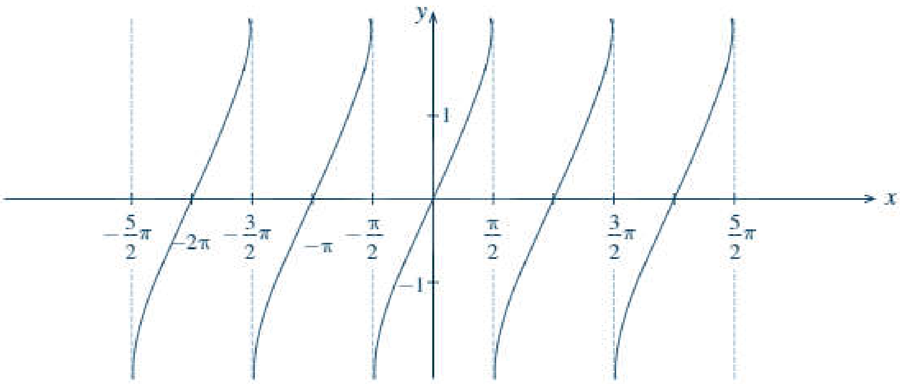
Se observa que $\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -3.732$, $\tan(0^\circ) = 0$ y $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3.732$, al aproximarse a $\frac{\pi}{2}$ la función crece indefinidamente al igual que para $-\frac{\pi}{2}$, es decir:



Periodo: π
Dominio: Todos los números reales excepto $\frac{\pi}{2} + K\pi$, siendo K un entero.
Rango: $\mathbb{R}$

$$\therefore\ \pi \tan x \text{ es impar y creciente entre las asíntotas.}$$

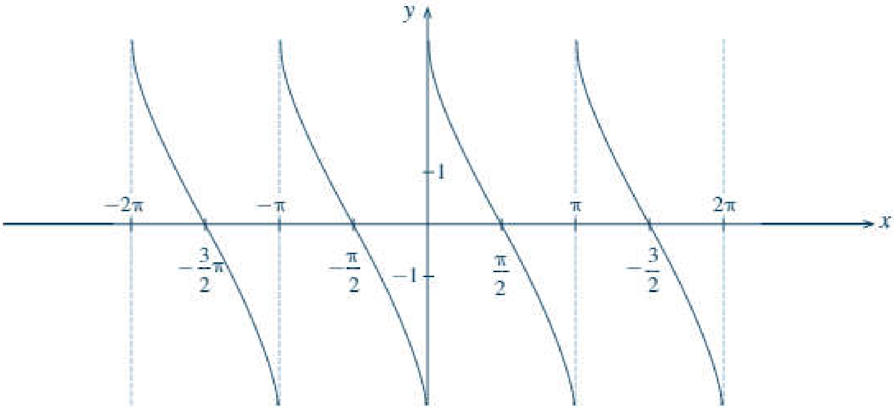
Para intervalos entre otras asíntotas, se tiene que la función es periódica para periodos de π, por lo que sólo se necesita repetir la gráfica anterior sobre intervalos de longitud π a la izquierda y derecha al intervalo inicial.



4. Dada la función $y = \cot x$, encuentra el rango y el dominio. Traza la gráfica correspondiente.

   De la función $y = \tan x$ y de acuerdo con la identidad $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, se puede graficar la función $y = \cot x$ al usar los valores recíprocos de sus ordenadas.

Dominio (x)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5}{12}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
Rango (y)	0	−0.267	−0.577	− 1	−1.732	∞	1.732	1	0.577	0.267	0



Periodo: π

Dominio: Todos los números reales excepto $K\pi$, siendo K un entero.

Rango: $\mathbb{R}$

$\therefore \quad y = \cot x$ es impar y decreciente entre las asíntotas.

Dominio (x)	Rango (y)
-2π	∞
$-\frac{11}{6}\pi$	2
$-\frac{3}{2}\pi$	1
$-\frac{7}{6}\pi$	2
$-\pi$	∞
$-\frac{5}{6}\pi$	−2
$-\frac{\pi}{2}$	−1
$-\frac{\pi}{6}$	−2
0	∞
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{2}$	1

Dominio (x)	Rango (y)
$\frac{5}{6}\pi$	2
π	∞
$\frac{7}{6}\pi$	−2
$\frac{3}{2}\pi$	−1
$\frac{11}{6}\pi$	−2
2π	∞

5 Dada la función $y = \csc x$, encuentra el dominio y rango. Traza la gráfica correspondiente.

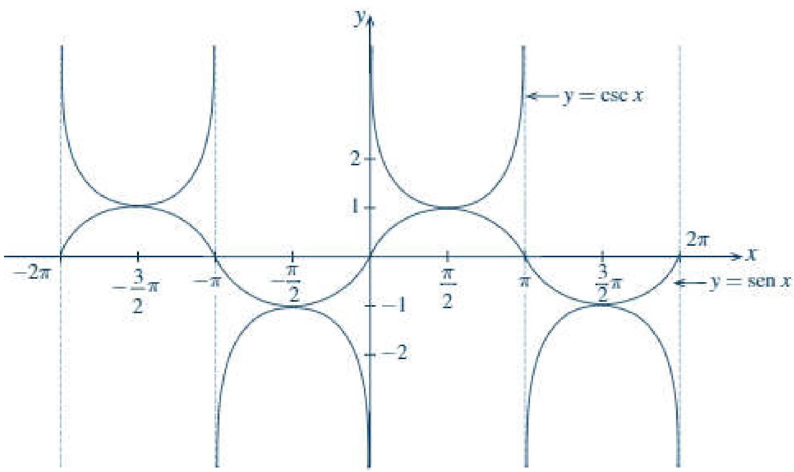
De la función $y = \operatorname{sen} x$ y de acuerdo con la identidad $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, se puede graficar la función $y = \csc x$ al usar los valores recíprocos de sus ordenadas.

Periodo: 2π

Dominio: Todos los números reales excepto $K\pi$, siendo K un entero.

Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$\therefore \quad y = \csc x$ es impar.



Dominio (x)	Rango (y)
$-\frac{7}{3}\pi$	2
-2π	1
$-\frac{5}{3}\pi$	2
$-\frac{3}{2}\pi$	∞
$-\frac{4}{3}\pi$	-2
$-\pi$	-1
$-\frac{2}{3}\pi$	-2
$-\frac{\pi}{2}$	∞
$-\frac{\pi}{3}$	2
0	1
$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{\pi}{2}$	∞
$\frac{2}{3}\pi$	-2

Dominio (x)	Rango (y)
π	-1
$\frac{4}{6}\pi$	-2
$\frac{3}{2}\pi$	∞
$\frac{5}{3}\pi$	2
2π	1
$\frac{7}{3}\pi$	2

6. Dada la función $y = \sec x$, encuentra el dominio y el rango. Traza la gráfica correspondiente.

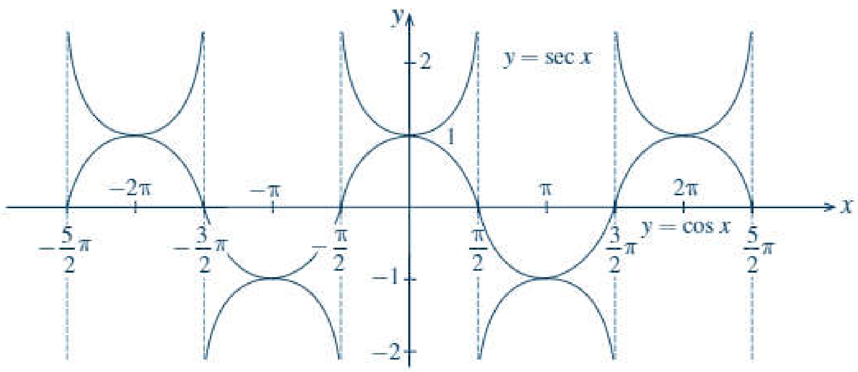
De la función $y = \cos x$ y de acuerdo con la identidad $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, se puede graficar la función $y = \sec x$ al usar los valores recíprocos de sus ordenadas.

Periodo: 2π

Dominio: todos los números reales excepto $\dfrac{\pi}{2} + K\pi$, siendo K un entero.

Rango: $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

$\therefore \quad y = \sec x \quad$ es par.



EJERCICIO 4

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

I. Dadas las siguientes funciones, encuentra el dominio y rango, utiliza la notación de intervalos y traza la gráfica correspondiente.

1. $f(x) = \sqrt{x+3}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$
3. $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{4x-5}$
5. $f(x) = 5x - 3$
6. $f(x) = x^2 + 6$
7. $f(x) = 3x^2 - 8$
8. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$
9. $f(x) = \dfrac{9x^2-4}{3x+2}$
10. $f(x) = |x - 7|$
11. $f(x) = |3x + 6|$

12. $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si} \quad x \leq 5 \\ 3 & \text{si} \quad 5 < x \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} -6 & \text{si} \quad x < -3 \\ -2 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 3 \\ 4 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si} \quad z \leq 3 \\ x-3 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 2-x & \text{si} \quad -1 < x \end{cases}$

18. $f(x)=-2\sqrt{x}$

19. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

20. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

II. Traza la gráfica correspondiente para:

1. $y=3^x$ y $y=3^{-x}$
2. $y=2^{2x}$ y $y=2^{-2x}$
3. $y=e^{2x}$
4. $y=\log 2x$
5. $y=\ln 5x$
6. $y=\operatorname{arcsen} x$
7. $y=\arccos x$
8. $y=\arctan x$ y $y=\operatorname{arccot} x$
9. $y=\operatorname{arccsc} x$
10. $y=\operatorname{arcsec} x$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Operaciones con funciones

Las operaciones básicas de las funciones son la adición, resta, multiplicación y división. A continuación definiremos cada una de ellas.

Adición y multiplicación de funciones

Dadas las funciones de variables real f y g con dominio $Domf$ y $Domg$, respectivamente, entonces la adición $f+g$ y la multiplicación $f \cdot g$ son funciones con dominio $Domf \cap Domg$ y reglas de correspondencia:

$$[f+g]\,(x)=f(x)+g(x) \qquad \text{(Adición)}$$

$$[f \cdot g]\,(x)=f(x) \cdot g(x) \qquad \text{(Multiplicación)}$$

Es decir:

$$f+g=\{(x, f(x)+g(x)) \mid x \in Domf \cap Domg\}$$

(El valor de $f+g$ en x es la suma de los valores de f y g en x)

$$f \cdot g=\{(x, f(x) \cdot g(x)) \mid x \in Domf \cap Domg\}$$

(El valor de $f \cdot g$ en x es el producto de los valores de f y g en x)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean f y g las funciones denotadas por, $f = \{(1,4), (-2,5), (5,8), (7,-2)\}$ y $g = \{(2,5), (1,-3), (5,1), (6,18), (7,13)\}$

encuentra $(f + g)$ y $(f \cdot g)$.

Solución

Se identifican los dominios y rangos de las funciones.

$$Domf = \{1, -2, 5, 7\} \quad Ranf = \{4, 5, 8, -2\}$$

$$Domg = \{2, 1, 5, 6, 7\} \quad Rang = \{5, -3, 1, 18, 13\}$$

La intersección entre los dominios es

$$Domf \cap Domg = \{1, 5, 7\}$$

de lo anterior, tenemos que:

$$f + g = \{(1,4 + (-3)), (5, 8 + 1), (7, -2 + 13)\}$$

$$\therefore \quad f + g = \{(1,1), (5,9), (7,11)\}$$

$$f \cdot g = \{(1,(4)(-3)), (5,(8)(1), (7,(-2)(13))\}$$

$$\therefore \quad f \cdot g = \{(1,-12), (5,8), (7,-26)\}$$

2 Dadas las funciones

$$f = \{(x, f(x)) | f(x) = x^2 - 9; x \in [2,5]\} \text{ y}$$
$$g = \{(x, g(x)) | g(x) = x + 2; x \in [3,6]\}$$

encuentra $(f + g)$ y $(f \cdot g)$.

Solución

El dominio de cada función dada es

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} |\ 2 \leq x \leq 5\}$$
$$Domg = \{x \in \mathbb{R} |\ 3 \leq x \leq 6\}$$

La intersección entre los dominios es $Domf \cap Domg = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$
de lo anterior, tenemos que:

$$f + g = \{(x, f(x) + g(x)) \mid f(x) + g(x) = x^2 - 9 + x + 2; x \in [3,5]\}$$

$$\therefore \quad f + g = \{(x, f(x) + g(x)) \mid f(x) + g(x) = x^2 + x - 7; x \in [3,5]\}$$

$$f \cdot g = \{(x, f(x) \cdot g(x) \mid f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 9)(x + 2);\ x \in [3,5]\}$$

$$\therefore \quad f \cdot g = \{(x, f(x) \cdot g(x) \mid f(x) \cdot g(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18;\ x \in [3,5]\}$$

3 Dadas las funciones f y g tales que $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 + 4$, encuentra las ecuaciones para las funciones $(f + g)$ y $(f \cdot g)$, indicando el dominio de cada función resultante.

Solución

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 2 + x^2 + 4 = x^2 + 3x + 2$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x - 2)(x^2 + 4) = 3x^3 + 12x - 2x^2 - 8 = 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

Sea $\mathbb{R}$ el dominio de f y g tal que $\mathbb{R} = Domf \cap Domg$, es decir:

$$f + g = \{(x, f(x) + g(x)) \mid f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 2;\ x \in \mathbb{R}\}$$

$$f \cdot g = \{(x, f(x) \cdot g(x)) \mid f(x) \cdot g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8;\ x \in \mathbb{R}\}$$

4 Dadas las funciones f y g tales que $f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$, encuentra las ecuaciones para las funciones $(f + g)$ y $(f \cdot g)$, indicando el dominio de cada función resultante.

Solución

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{x-1}\right)$$

El dominio de f es $[-4,+\infty)$; el dominio de g es $[1,+\infty)$; la intersección entre los dominios es: $Domf \cap Domg = [1,+\infty)$. De lo anterior, tenemos que

$$\therefore \quad f + g = \left\{(x, f(x) + g(x)) \middle| f(x) + g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1};\ x \in |1,+\infty|\right\}$$

$$\therefore \quad f \cdot g = \left\{(x, f(x) \cdot g(x)) \middle| f(x) \cdot g(x) = \left(\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{x-1}\right);\ x \in [1,+\infty]\right\}$$

Diferencia de funciones

Si f es una función de variable real, la función $-f$ con dominio $Domf$ se define por la regla de correspondencia dada por $(-f)(x) = -f(x)$; es decir $-f = (-1)f$.

Para cualquier otra función g tal que $g(x)$ coincida con $-f(x)$ para todo el $Domf$, también deberá satisfacer que $f + g = 0$.

De lo anterior, la definición de la diferencia de funciones establece que

$$f - g = f + (-g)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean f y g las funciones denotadas por $f = \{(3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$ y $g = \{(3,9), (5,6), (7,3)\}$ encuentra $(f - g)$.

Solución

Se identifican los dominios y los rangos de las funciones dadas.

$$Domf = \{3, 4, 5, 6\} \qquad Ranf = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Domg = \{3, 5, 7\} \qquad Rang = \{9, 6, 3\}$$

Para $(-g)$, tenemos que:

$$Dom(-g) = \{3, 5, 7\} \qquad Ran(-g) = \{-9, -6, -3\} \qquad \therefore \quad Domf \cap Dom(-g) = \{3,5\}$$

De lo anterior, resulta que:

$$f - g = \{(3,1 - 9), (5,3 - 6)\} \qquad \therefore \quad f - g = \{(3,-8), (5,-3)\}$$

2 Dadas las funciones $f = \{(x, f(x)) \mid f(x) = 2x;\ x \in [0,3]\}$ y $g = \{(x, g(x)) \mid g(x) = x^2;\ x \in [1,3]\}$ encuentra $(f - g)$.

Solución

El dominio de cada función dada es:

$$Domf = \{x \in \mid 0 \leq x \leq 3\}$$
$$Domg = \{x \in \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

La intersección entre los dominios es:

$$Domf \cap Domg = \{x \in \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

De lo anterior, tenemos que:

$$\therefore \quad f - g = \{(x, f(x) - g(x)) \mid f(x) - g(x) = 2x - x^2;\ x \in [1,3]\}$$

También se observa que $Dom(f - g) = Dom(f + g)$

3 Dadas las funciones f y g tales que $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x^2$, encuentra la ecuación para la función $(f - g)$; indica el dominio de la función resultante.

Solución

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 1 - 2x^2 = x^3 - 2x^2 + 1$$

El dominio de f y g es el conjunto de los números reales, puesto que $Domf \cap Domg = \mathbb{R}$, es decir:

$$\therefore \quad f - g = \{(x, f(x) - g(x)) \mid f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}\}$$

4 Dadas las funciones f y g tales que $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 2 + \frac{2}{x}$, determina la ecuación para la función $(f - g)$; indica el dominio de la función resultante.

Solución

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{4 - x^2} - \left(2 + \frac{2}{x}\right) = \sqrt{4 - x^2} - 2 - \frac{2}{x}$$

El dominio de f es $[-2,2]$; el dominio de g es el conjunto de todos los números reales, excepto 0. La intersección entre los dominios es:

$$Domf \cap Domg = [-2,0) \cup (0,2]$$

Es decir,

$$Domf \cap Domg = \{x \in \mathbb{R} \mid (-2 \leq x < 0) \cup (0 < x \leq 2)\}$$

De lo anterior, tenemos que:

$$f - g = \left\{(x, f(x) - g(x) \middle| f(x) - g(x) = \sqrt{4 - x^2} - 2 - \frac{2}{x}; x \in \mathbb{R} \middle| -2, 0) \cup (0, 2)\right\}$$

Cociente de funciones

Si f es una función de variable real, la función $\frac{1}{f}$ se define para todos los valores de $Domf$ tales que $f(x) \neq 0$ mediante la regla de correspondencia:

$$\left[\frac{1}{f}\right](x) = \frac{1}{f(x)}$$

Para $f \cdot \frac{1}{f} = 1$ si y sólo si el dominio $Domf$ es el conjunto de los números reales y el rango $Ranf$ no contiene el cero. De lo anterior, la definición del cociente de funciones establece que:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean f y g las funciones denotadas por $f = \{(1,2), (3,8), (4,-1), (-5,12)\}$ y $g = \{(1,4), (-3,2), (4,-7), (-5,6)\}$. Encuentra $\frac{f}{g}$.

Solución

De acuerdo con la definición dada, tenemos que:

$$\frac{1}{g} = \left\{\left(1, \frac{1}{4}\right), \left(-3, \frac{1}{2}\right), \left(4, \frac{1}{7}\right), \left(-5, \frac{1}{6}\right)\right\}$$

Se identifican los dominios de las funciones dadas.

$$Domf = \{1, 3, 4, -5\} \qquad Domg = \{1, -3, 4, -5\}$$

La intersección entre los dominios es:

$$Domf \cap Domg = \{1, 4, -5\}$$

De lo anterior, tenemos que:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} = \left\{\left(1, 2\left(\frac{1}{4}\right)\right), \left(4, -1\left(-\frac{1}{7}\right)\right), \left(-5, 12\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right),\ \left(4, \frac{1}{7}\right),\ (-5, 2)\right\}$$

2 Dadas las fuciones $f = \{(x, f(x)) | f(x) = x^3 - 1; x \in [2,5]\}$ y $g = \{(x, g(x)) | g(x) = x^2 + x + 1; x \in [1,4]\}$. Encuentra $\dfrac{f}{g}$.

Solución

El dominio de cada función dada es

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 5\} \qquad Domg = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 4\}$$

La intersección entre los dominios es

$$Domf \cap Domg = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 4\}$$

De lo anterior, tenemos que:

$$\frac{f}{g} = \left\{\left(x, \frac{f(x)}{g(x)}\right) \middle| \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}; x \in [2, 4]\right\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{\left(x, \frac{f(x)}{g(x)}\right) \middle| \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}; x \in [2, 4]\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{f}{g} = \left\{\left(x, \frac{f(x)}{g(x)}\right) \middle| \frac{f(x)}{g(x)} = x - 1; x \in [2, 4]\right\}$$

3 Dadas las funciones f y g tales que $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = x^3$, determina la ecuación para la función $\dfrac{f}{g}$. Indica el dominio de la función resultante.

Solución

$$\frac{f}{g} = \left[f \cdot \frac{1}{g}\right](x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

El dominio de f y g es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y el dominio de la función resultante está dado por el conjunto de los reales excepto el valor $x = 0$. Es decir,

$$\frac{f}{g} = \left[f \cdot \frac{1}{g}\right](x) = \left\{\left(x, \frac{f(x)}{g(x)}\right) \middle| \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{x}; x \in \mathbb{R} \text{ excepto cero}\right\}$$

4 Dadas las funciones f y g tales que $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; encuentra la ecuación para la función $\frac{f}{g}$ e indica el dominio de la función resultante.

Solución

$$\frac{f}{g} = \left[f \cdot \frac{1}{g}\right](x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

El dominio de f es $[-3,3]$; el dominio de g es $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$; la intersección entre los dominios es $Domf \cap Domg = [-3,-1) \cup (1,3]$.

De lo anterior, tenemos que:

$$\frac{f}{g} = \left[f \cdot \frac{1}{g}\right](x) = \left\{\left(x, \frac{f(x)}{g(x)}\right) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}}; x \in [-3,-1) \cup (1,3]\right\}$$

Conclusiones

Al analizar el álgebra de las funciones se ha establecido:

a) Para la adición de dos funciones $f + g$ se suman los valores de las funciones dadas.

b) Para la diferencia de dos funciones $f - g$ se restan los valores de las funciones en el orden dado.

c) Para la multiplicación de dos funciones $f \cdot g$ se multiplican los valores de las funciones dadas.

d) Para el cociente de dos funciones $\frac{f}{g}$ se dividen los valores de las funciones en el orden dado.

El dominio de las funciones resultantes de la suma, diferencia y multiplicación es el conjunto de todos los elementos x que son comunes a los dominios de f y g; es decir, la intersección de los conjuntos *Domf* y *Domg*, lo cual se expresa en símbolos como:

a) $Dom(f + g) = Domf \cap Domg$

b) $Dom(f - g) = Domf \cap Domg$

c) $Dom(f \cdot g) = Domf \cap Domg$

El dominio $Dom \frac{f}{g} = Domf \cap Domg$, excepto los valores de x donde $g(x) = 0$, ya que la división entre cero es imposible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dadas las funciones $f = \{(-2,1), (1,3), (2,7), (4,8), (5,10)\}$ y $g = \{(1,2), (-3,8), (4,-6) (6,10), (5,4)\}$, determina:

a) f^2

b) $4f - 2g$

c) $3f - 5g$

d) $(f - g)(4)$

e) $\dfrac{5f}{3g}$

f) $\dfrac{f+2g}{g-1}$

Solución

La suma y el producto de cualquier número finito de funciones se definen por las leyes asociativas en:

a) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$

b) $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n$

Si todas las funciones son la misma función, denominada f, lo anterior se expresa como:

a) $f + f + f + \ldots + f = f \cdot 1 + f \cdot 1 + f \cdot 1 + \ldots + f \cdot 1 = f(1 + 1 + 1 + \ldots + 1) = nf$

b) $f \cdot f \cdot f \cdot \ldots \cdot f^n$, también por medio de las leyes de los exponentes, tenemos que:

$f^n \cdot f^m = f^{n+m} (Dom f^n \cap Dom f^m)$, también:

$f^0 = 1$ y $f^{-n} = \dfrac{1}{f^n} (n > 0)$.

Las observaciones anteriores se aplican en la solución del problema propuesto.

a)
$$f^2 = \left\{\left(-2,1^2\right), \left(1,3^2\right), \left(2,7^2\right), \left(4,8^2\right), \left(5,10^2\right)\right\}$$
$$\therefore \quad f^2 = \{(-2,1), (1,9), (2,49), (4,64), (5,100)\}$$

b)
$$\begin{aligned}
4f &= \{(-2,4(1)), (1,4(3)), (2,4(7)), (4,4(8)), (5,4(10))\}\\
4f &= \{(-2,4), (1,12), (2,28), (4,32), (5,40)\}\\
-2g &= \{(1,-2(2)), (-3,-2(8)), (4,-2(6)), (6,-2(10)), (5,-2(4))\}\\
-2g &= \{(1,-4), (-3,-16), (4,12), (-6,20), (5,-8)\}\\
4f - 2g &= \{(1,12 - 4), (4,32 + 12), (5, 40 - 8)\}\\
\therefore \quad 4f - 2g &= \{(1,8), (4,44), (5,32)\}
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
3f &= \{(-2,3(1)), (1,3(3)), (2,3(7)), (4,3(8)), (5,3(10))\}\\
3f &= \{(-2,3), (1,9), (2,21), (4,24), (5,30)\}\\
-5g &= \{(1,-5(2)), (-3,-5(8)), (4,-5(-6)), (6,-5(10)), (5,-5(4))\}\\
-5g &= \{(1,-10), (-3,-40), (4,30), (6,-50), (5,-20)\}\\
3f - 5g &= \{(1,9 - 10), (4,24 + 30), (5,30 - 20)\}\\
\therefore \quad 3f - 5g &= \{(1,-1), (4,54), (5,10)\}
\end{aligned}$$

d) $(f-g)(4) = 8 - (-6) = 8 + 6$

$\therefore \quad (f-g)(4) = 14$

e) $5f = \{(-2,5(1)), (1,3(5)), (2,5(7)), (4,5(8)), (5,5(10))\}$

$5f = \{(-2,5), (1,15), (2,35), (4,40), (5,50)\}$

$3g = \{(1,3(2)), (-3,3(8)), (4,3(-6)), (6,3(10)), (5,3(4))\}$

$3g = \{(1,6), (-3,24), (4,-18), (6,30), (5,12)\}$

$$\frac{1}{3g}\left\{\left(1,\frac{1}{6}\right),\left(-3,\frac{1}{24}\right),\left(4,-\frac{1}{18}\right),\left(6,\frac{1}{30}\right),\left(5,\frac{1}{12}\right)\right\}$$

$$\frac{5f}{3g} = 5f\cdot\frac{1}{3g} = \left\{\left(1,15\left(\frac{1}{6}\right)\right),\left(4,40\left(-\frac{1}{18}\right)\right),\left(5,50\left(\frac{1}{12}\right)\right)\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{5f}{3g} = \left\{\left(1,\frac{5}{2}\right),\left(4,\frac{20}{4}\right),\left(5,\frac{25}{6}\right)\right\}$$

f) $2g = \{(1,2(2)),(-3,2(8)), (4,2(-6)),(6,2(10)), (5,2(4))\}$

$2g = \{(1,4), (-3,16), (4,-12), (6,20), (5,8)\}$

$f + 2g = \{(1,3 + 4), (4,8 + (-12)), (5,10 + 8)\}$

$f + 2g = \{(1,7), (4,-4), (5,18)\}$

$g - 1 = \{(1,2 - 1), (-3,8 - 1), (4,-6 - 1), (6,10 - 1), (5,4 - 1)\}$

$g - 1 = \{(1,1), (-3,7), (4,-7), (6,9), (5,3)\}$

$$\frac{1}{g-1} = \left\{(1,1),\left(-3,\frac{1}{7}\right),\left(4,-\frac{1}{7}\right),\left(6,\frac{1}{9}\right),\left(5,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$\frac{f+2g}{g-1} = (f+2g)\left(\frac{1}{g-1}\right) = \left\{(1,7(1)),\left(4,-4\left(-\frac{1}{7}\right)\right),\left(5,18\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{f+2g}{g-1} = \left\{(1,7),\left(4,\frac{4}{7}\right),(5,6)\right\}$$

2 Dadas las funciones f, g, con reglas de correspondencia $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 2$, sus dominios respectivos son $Domf = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Domg = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$; determina $(3f + 2g)(1)$.

Solución

$$3f(1) = 3(1 + 2) = 3(3) = 9$$

$$2g(1) = 2[(1)^2 + 2(1) + 2] = 2(5) = 10$$

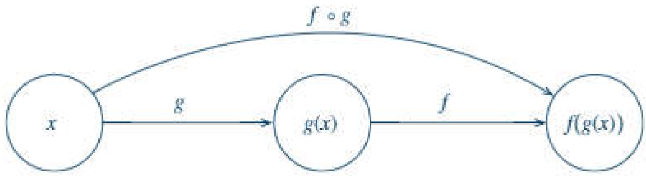
$$(3f + 2g)(1) = 9 + 10$$

$$\therefore \quad (3f + 2g)(1) = 19$$

Composición de funciones

La composición es otra operación básica que a veces se considera como una multiplicación de funciones. Dadas las funciones f y g, la función composición, denotada por $f \circ g$ y que se interpreta como **f círculo g** o **f composición g** cuyo dominio es el conjunto de elementos $x \in Domg$ tales que $g(x) \in Domf$ y cuya regla de correspondencia es: $[f \circ g](x) = f(g(x))$.

El siguiente diagrama nos explica la definición de composición de f con g.



La función g tiene dominio en el conjunto x y rango en $g(x)$; la función f tiene dominio en $g(x)$ y rango en $f(g(x))$.

$$\therefore \quad f \circ g \text{ tiene dominio en } x \text{ y rango en } f(g(x)).$$

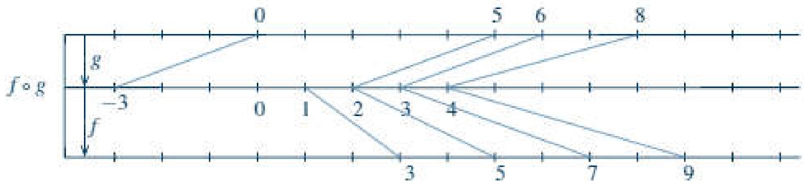
EJEMPLOS

Ejemplos

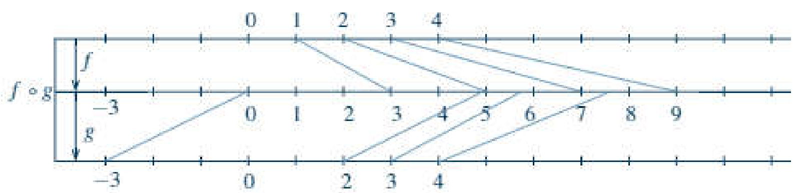
1 Dadas las funciones $f = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$ y $g = \{(0,-3), (5,2), (6,3), (8,4)\}$, determina $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución

La función $f \circ g$ se representa como una correspondencia o mapeo, es decir:



$\therefore \; f \circ g = \{(5,5), (6,7), (8,9)\}$



$\therefore \; g \circ f = \{(2,2)\}$

Cuando dos funciones f y g forman la función composición como en el ejemplo anterior, se establece que $f \circ g \neq g \circ f$ por no presentarse la ley conmutativa entre dichas funciones.

2 Dadas las funciones $f=\{(x,f(x)) \mid f(x)=x^2-3;\, x\in\mathbb{R}\}$ y $g=\{(x,g(x)) \mid g(x)=2x-1;\, x\in\mathbb{R}\}$, determina $f\circ g$ y $g\circ f$.

Solución

$$[f\circ g](x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)^2-3=4x^2-4x+1-3$$
$$\therefore\quad [f\circ g](x)=f(g(x))=4x^2-4x-2$$
$$[g\circ f](x)=g(f(x))=g(x^2-3)=2(x^2-3)-1=2x^2-6-1$$
$$\therefore\quad [g\circ f](x)=g(f(x))=2x^2-7$$

Lo anterior también se puede expresar como:

$$f\circ g=\{(x,f(g(x)) \mid f(g(x))=4x^2-4x-2;\, x\in\mathbb{R}\}$$
$$g\circ f=\{(x,g(f(x)) \mid g(f(x))=2x^2-7;\, x\in\mathbb{R}\}$$

En este caso $Domf=Domg=\mathbb{R}$, por lo que $Domg\circ f=Domf\circ g=\mathbb{R}$.

3 Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2-1$, determina $H(x)$ si $H=f\circ g$ y encuentra el dominio de H.

Solución

$$H(x)=[f\circ g](x)=f(g(x))=f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}$$

El dominio de g es $(-\infty,+\infty)$, el dominio de f es $[0,+\infty)$.

$\therefore$ el dominio H es el conjunto de números reales para los cuales x no está en $(-1,1)$, es decir:

$$(-\infty,-1] \text{ y } [1,+\infty).$$

4 Dadas las funciones, $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=3x-2$ determina:

a) $f\circ f$ *b)* $g\circ g$ *c)* $f\circ g$ *d)* $g\circ f$

Solución

El dominio de g es $(-\infty,+\infty)$, el dominio de f es $[0,+\infty)$

a) $[f\circ f](x)=f(f(x))=f(\sqrt{x})=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$

$\therefore$ el dominio de $f\circ f$ es $[0,+\infty)$.

b) $[g\circ g](x)=g(g(x))=g(3x-2)=3(3x-2)-2=9x-6-2=9x-8$

$\therefore$ el dominio de $g\circ g$ es $[-\infty,+\infty)$.

c) $[f\circ g](x)=f(g(x))=f(3x-2)=\sqrt{3x-2}$; el dominio de $f\circ g$ es $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

d) $[g\circ f](x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=3\sqrt{x}-2$; el dominio de $g\circ f$ es $[0,\infty)$.

EJERCICIO 5

I. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes	
Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. Dadas las funciones $f = (2,0), (3,8), (4,6), (5,2), (6,1)$ y $g = (0,5), (2,9), (4,7), (6,3)$; determina:

a) $f + g$
b) $f \cdot g$
c) $f - g$
d) $\dfrac{f}{g}$
e) f^2
f) g^2
g) $2f + 3g$
h) $7f - 4g$
i) $[2f - g](4)$
j) $[f + 2g](2)$
k) $\dfrac{5f}{2g}$
l) $\dfrac{6f - 4g}{2g + 3}$

2. Dadas las funciones $f = \left\{(0,\sqrt{8}), \left(2,\frac{1}{2}\right), (4,\sqrt{3}), (6\sqrt{5})\right\}$ y $g = \{(0,\sqrt{2}), (1,\sqrt{11}), (2,0), (4,-1)\}$, determina:

a) $f + g$
b) $f - g$
c) $f \cdot g$
d) $\dfrac{f}{g}$
e) $f^2 + 3g$
f) $[f + g](4)$
g) $[f \cdot g](2)$
h) $\dfrac{3f}{4g}$
i) $f^2 - g^2$

3. Dadas las funciones $f = \{(x, f(x) \mid f(x) = x^2 - 9;\ x \in [1,4]\}$ y $g = \{(x,g(x) \mid g(x) = 2x + 1;\ x \in [2,5]\}$, determina:

a) $f + g$
b) $f - g$
c) $f \cdot g$
d) $\dfrac{f}{g}$

4. Dadas las funciones f y g, con reglas de correspondencia $f(x) = \sqrt{x+8}$ y $g(x) = \sqrt{x-7}$, determina:

a) $f + g$
b) $3f + 2g$
c) $f - g$
d) $2f - 4g$
e) $f \cdot g$
f) f^2
g) $\dfrac{f}{g}$
h) $\dfrac{f+1}{2g-3}$

5. Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, determina las ecuaciones para las funciones:

a) $f + g$ *b)* $f - g$ *c)* $f \cdot g$ *d)* $\dfrac{f}{g}$

determina también el dominio de cada función resultante.

6. Dadas las funciones f y g, determina el dominio de la función resultante de:

a) $f+g$
b) $f-g$
c) $f \cdot g$
d) $\frac{f}{g}$
e) $\frac{g}{f}$
f) $f \circ g$
g) $g \circ f$

Para:

1) $f(x)=\sqrt{x-3}; g(x)=\frac{1}{x}$
2) $f(x)=x-7; g(x)=x^2+1$
3) $f(x)=\sqrt{x}; g(x)=x^2-4$
4) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}; g(x)=\frac{1}{x}$
5) $f(x)=\sqrt{1-x^2}; g(x)=\sqrt{x^2-9}$
6) $f(x)=|x|; g(x)=|x-3|$

7. Dadas las funciones $f=\{(2,4), (3,9), (4,6), (5,7)$ y $g=\{(2,3),(3,2),(4,1), (5,0)\}$ determina e ilustra por mapeo:

a) $f \circ g$
b) $g \circ f$

8. Dadas las funciones $f=\{(x, f(x) \mid f(x)=4x-2; x \in \mathbb{R}\}$ y $g=\{(x, g(x) \mid g(x)=x^2+1; x \in \mathbb{R}\}$, determina:

a) $f \circ g$
b) $g \circ f$

9. Dadas las funciones $f(x)=x^2+4$ y $g(x)=\sqrt{x}$, determina $\phi(x)$ si $\phi=f \circ g$ y encuentra el dominio de ϕ.

10. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$ $Domf=(-\infty,+\infty)$; $g(x)=4x-5$, $Domg=[0,3]$, determina:

a) $f \circ g$ *b)* $g \circ f$ *c)* $f \circ f$ *d)* $g \circ g$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Completa la tabla siguiente.

Notación de intervalos	Notación de desigualdad	Representación gráfica
[6,13)		
	$-4 < 4x \leq 4$	
	$x \leq 2$	
[1,8]		
	$7 < x$	

2. Escribe el conjunto de pares ordenados que forman parte de la función f y obtén el dominio y rango de la función si la regla de correspondencia está dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - 64}{x - 8}$

3. Encuentra el dominio y el rango de las siguientes funciones. Utiliza tanto la notación de intervalos como la de desigualdades. Traza la gráfica correspondiente a cada función.

a) $f(x) = \sqrt{5 + 3x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}$

4. Si se tienen las funciones denotadas por $f = \{(2,0), (4,7), (10,8), (3,6)\}$ y $g = \{(11,2), (3,8), (6,5), (4,7)\}$, encuentra $(f + 7g)$ y $(f^2 - 4g)$.

5. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x^2}}$ y $g(x) = 3x - 8x^2$, determina:

a) $g \circ f$ *b)* $\dfrac{f}{g}$ *c)* $f \cdot g$

Encuentra el dominio resultante para cada caso.

UNIDAD 2

Límites y continuidad de funciones

Evaluación diagnóstica

1. ¿Qué entiendes por límite de una función?

2. Si la función *f*, cuya regla de correspondencia es $f(x) = 3x - 20$, demuestra que $\lim_{x\to 5} - 5$.

3. Calcula el límite de la función $g(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - 25}$ cuando $x \to 6$.

4. ¿Qué significa un límite infinito?

5. ¿La función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es continua? ¿Por qué?

Límites y continuidad de funciones

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca el concepto de límite de una función.
- Interprete límite de una variable.
- Aplique las propiedades de los límites.
- Distinga entre función continua y discontinua.
- Conozca medir segmentos rectilíneos y congruencia de segmentos.
- Realice el cálculo del límite de una función.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Noción intuitiva de límite.
- Cálculo del límite de funciones.
- Continuidad de una función.

Contenidos procedimentales

- Comprenderá el concepto de límite de una función.
- Resolverá y argumentará, mediante los diversos casos que se presentan, los límites de diferentes funciones.
- Identificará diferencias entre función continua y discontinua.
- Resolverá problemas utilizando los conceptos aprendidos de los límites.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos de límites.
- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Noción intuitiva de límite

¿Qué se entiende por **límite**? Comúnmente se habla del límite de velocidad, del límite entre dos naciones, del límite de peso de un boxeador, del límite de paciencia, del límite de elasticidad de un cable, del límite de tensión, etcétera; todo lo anterior nos hace comprender que un límite es un tipo de **cota** que en algunos casos puede que se alcance o que se supere.

En el estudio del cálculo, la comprensión del concepto *límite* es fundamental, por lo que es conveniente explicarlo en términos prácticos y aplicado a situaciones y problemas cotidianos.

Por ejemplo, pensemos en la relación entre la fuerza aplicada a un resorte de extensión (peso) y su cambio de longitud; es decir, cuánto se deflexiona el resorte sin llegar a romperse. Para obtener esa información, aumentaríamos el peso suspendido del resorte para después registrar los cambios de longitud (s) para cada peso agregado sucesivamente

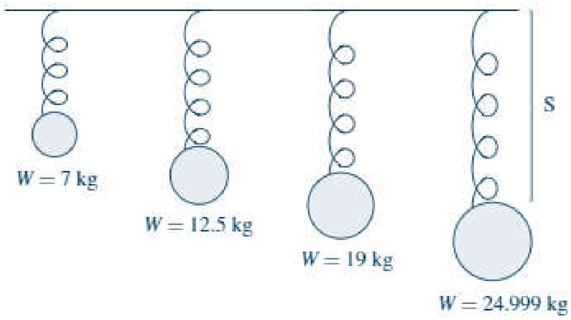
Supongamos que el resorte soporta 25 kg antes de romperse. Cuando el peso se acerca a los 25 kg, es necesario que los incrementos de peso sean cada vez más y más pequeños para no llegar al máximo de 25 kg. Registrando las longitudes sucesivas de deflexión del resorte podríamos determinar el valor L, es decir, la longitud S del resorte tenderá a L conforme el peso W tienda a 25 kg. Simbólicamente se expresa como:

$S \rightarrow L$ (que se leerá **S tiende a L**) cuando

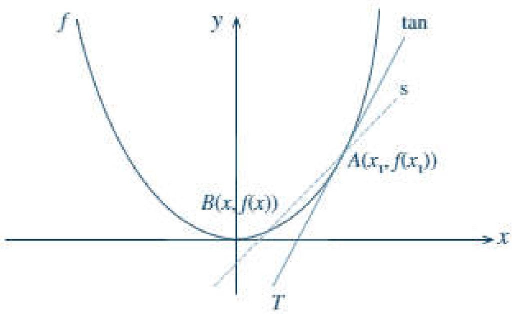
$W \rightarrow 25$ (que se leerá **W tiende a 25**) siendo

$W < 25$, establecemos que L es el **límite** de la longitud S.

Si se tomaran fotografías del resorte cuando éste es sometido a diferentes pesos podríamos observar que la longitud máxima que alcanzaría justo antes de romperse sería el valor máximo dado por L.



Otro ejemplo de aplicación se puede ver en la siguiente situación geométrica, en donde f es una función real. Sean $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x, f(x))$ dos puntos cualesquiera sobre la gráfica de f, tal y como se representa en la siguiente figura:



La recta T es la tangente a la gráfica de f en el punto A. La recta S, es la **recta secante** que corta a la gráfica de F en A y en B, la cual se aproxima a la coincidencia con T cuando B se aproxima a A a lo largo de la curva. Es decir, la recta secante tenderá a parecerse a la recta tangente conforme las coordenadas del punto B tiendan a las coordenadas del punto A.

Sea m_{sec} la pendiente de la recta secante que pasa por A y por B, entonces, observando la gráfica anterior, la pendiente de la secante está dada por:

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Conforme las coordenadas del punto B se acerquen cada vez más a las coordenadas del punto A, entonces la recta secante tenderá a la recta tangente y, por tanto, la pendiente de la secante tenderá a la pendiente de la tangente. Esto se expresa como:

$$m = \lim_{x \to x_1} m_{sec} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Si existe un número $\boldsymbol{m}$, la recta que pasa por A con pendiente m es la recta tangente T. Este particular límite, relacionado con el concepto geométrico de tangente de la gráfica de f en un punto A, se denomina **derivada de f en x_1**.

Límite de una variable

En la geometría elemental se encuentra el conocimiento de una variable que se aproxima a un límite, por ejemplo:

El área del círculo se establece y se calcula como el límite común de las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de un número $\boldsymbol{n}$ cualquiera de lados. Así, cuando el valor de n se incrementa, se observa que el área de los polígonos tiende hacia un límite, llamado **área del círculo**; en otras palabras, para cualquier círculo determinado de área c se tiene que conforme aumenta el valor de n, el área v de un polígono inscrito o circunscrito se acercará indefinidamente al valor de c de tal manera que la diferencia $(v - c)$ adquiera valores tan pequeños como se desee.

Por conclusión, si la variable (v) tiende a la constante (c) como límite cuando los valores sucesivos de v son tales que el valor numérico de la diferencia $v - c$ puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier cantidad positiva predeterminada tan pequeña como se quiera; dicha relación se escribe $\lim \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$, o bien, $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{c}$.

Ejemplo

Si v toma la sucesión infinita de valores

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

a medida que n toma los valores de 1, 2, 3, 4, … , va disminuyendo $\frac{1}{2^n}$, pero conservándose positivo, por lo que $v \to 0$ al aumentar n, es decir, $\lim v = 0$.

Límite de una función

Si consideramos la función f definida por:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$$

donde el dominio contiene todos los números reales excepto $x=2$. Si queremos hallar el límite de $f(x)$ al aproximarse x a 2, es decir, si no nos interesa hallar el valor de $f(x)$, puesto que f no está definida en $x=2$; lo que se busca es el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x lo hace a 2.

Se determina $f(x)$, considerando valores de x próximos a 2, es decir, al aproximarse por la izquierda. Así, tenemos los siguientes valores: 1.5, 1.75, 1.9, 1.99 y 1.999; al aproximarse por la derecha tenemos 2.5, 2.25, 2.1, 2.01 y 2.001. Al escribir estos datos en una tabla, tenemos que:

x	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999 → 2 ← 2.001	2.01	2.1	2.25	2.5
***f*(*x*)**	9.25	10.5625	11.41	11.9401	11.9940 → ? ← 12.006	12.0601	12.61	13.5625	15.25

De la tabla anterior deducimos que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a 2 es 12, es decir $f(x)\to 12$ cuando $x\to 2$. También representamos este límite como:

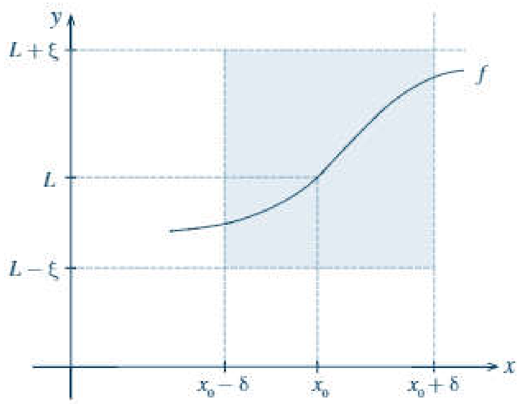
$$\lim_{x\to 2} f(x)=12$$

Lo anterior implica que: una función no puede tender a dos límites distintos a la vez, es decir, si el límite de una función existe, éste es único.

Definición. Se dice que el número L es el límite de la función f cuando x tiende a x_0 si para cada número $\xi<0$ existe un número $\delta>0$, tal que para $x\in Domf$ se cumple que $0<|x-x_0|<\delta$, implica que $|f(x)-L|<\xi$.

$$\therefore\ \lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad \text{El límite de } f(x)\text{, cuando } x \text{ tiende a } x_0\text{, es } L.$$

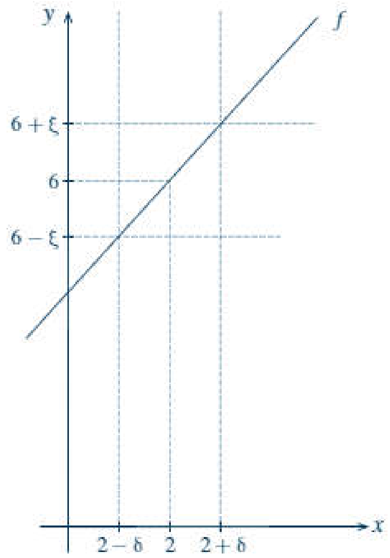
La definición anterior se interpreta geométricamente de la siguiente manera:



Para un número $\xi>0$ dado, se trazan las dos rectas horizontales $y=f(x)=L-\xi$ y $y=f(x)=L+\xi$; por definición, $\lim_{x\to x_0} f=L$ requiere que dado $\xi>0$, se puede escoger $\delta>0$, tal que si para cualquiera de dos puntos (x,y) sobre la gráfica de f se cumple que su coordenada x se encuentra en el intervalo definido entre las rectas verticales $x=x_0-\delta$ y $x=x_0+\delta$, entonces, la coordenada y también deberá ubicarse en el intervalo $L-\xi<f(x)<L+\xi$.

Ejemplo

Sea f la función cuya regla de correspondencia es $f(x) = x + 4$, demuestra que $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$.



De la definición de límite se tiene que para cualquier $\xi > 0$ exista un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - 6| = |x + 4 - 6| = |x - 2| < \xi$$

siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, es decir, para cada $\xi > 0$ tenemos $\delta = \xi$.

Entonces, $0 < |x - 2| < \delta = \xi$ implica que:

$$|f(x) - 5| = |x - 2| < \xi$$

EJERCICIO 6

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Qué se entiende por *límite*?
2. Explica mediante un ejemplo la idea intuitiva de *límite*.
3. Explica tu idea sobre el límite de una variable.
4. ¿Qué se entiende por *límite de una función*?
5. Escribe tu propia definición de *límite de una función*.

II. Realiza el siguiente ejercicio práctico.

1. Dibuja polígonos de 8, 10, 12 y 14 lados inscritos y circunscritos a un círculo; compara las áreas respectivas con base en el concepto de límite.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Cálculo del límite de funciones

Propiedades de los límites

Al explicar la definición de *límite* se utilizaron, sin mención formal, algunas propiedades fundamentales de la noción *límite*; una relación de las mismas se presenta a continuación.

1. Si c es una constante, el límite de c cuando x tiende a a es igual a c.

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} 5 = 5$$

2. El límite de x cuando x tiende a a es igual a a.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 3} x = 3$$

3. Si c es una constante y f es una función, el límite del producto constante por función cuando x tiende a a es igual al producto de la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x \to a} c\ f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2}\ 4x = 4 = \lim_{x \to 2} x = (4)(2) = 8$$

4. Si f y g son funciones, el límite de un producto de funciones cuando x tiende a a es igual al producto de los límites de las funciones.

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Esta propiedad también se expresa en forma más general para cualquier entero positivo n, como:

$$\lim_{x \to a}\ x^n = a^n$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 3} x^2 = \left(\lim_{x \to 3}\ x\right)\left(\lim_{x \to 3}\ x\right) = (3)(3) = (3)^2 = 9$$

Directamente, $\lim_{x \to 3}\ x^2 = (3)^2 = 9$

5. Si f y g son funciones, el límite de una suma o diferencia cuando x tiende a a es igual a la suma o diferencia de los límites de las funciones.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(3x^2+2x)&=\lim_{x\to 5}3x^2+\lim_{x\to 5}2x\\&=3\lim_{x\to 5}x^2+2\lim_{x\to 5}x\\&=3(5)^2+2(5)=75+10=85\end{aligned}$$

6. Si t y g son funciones, el límite de un cociente cuando x tiende a a es igual al cociente de los límites de las funciones, siempre y cuando el límite de la función del denominador sea diferente de cero.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \text{si}\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^3-3}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(5x^3-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{5(2)^3-3}{2(2)+1}=\frac{37}{5}$$

7. Si f es una función, el límite de una raíz enésima de una función cuando x tiende a a es igual a la raíz enésima del límite de la función.

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x^2+1)}=\sqrt{2(2)^2+1}=\sqrt{9}=3$$

Cálculo del límite de funciones

Existen varios casos para calcular el límite de una función. A continuación, describiremos y ejemplificaremos cada uno de ellos:

Caso I

Si la función está expresada en su forma más simple, se sustituye directamente el valor a que tiende la variable independiente en la función, dando lugar al límite buscado.

Al aplicar las propiedades de los límites en la determinación del límite de funciones, se ha observado que al sustituir directamente la variable independiente de la función con el valor a que tiende dicha variable se encuentra el límite de la función.

Ejemplo

1. Calcula el límite de la función $y = x^2 + 2x - 1$ cuando $x \to 2$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 1) = (2)^2 + 2(2) - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$$

2. Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^3 + 5x}{4x - 6}$ cuando $x \to \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^3 + 5x}{4x - 6} = \frac{\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}(x^3 + 5x)}{\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}(4x - 6)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)}{4\left(\frac{1}{2}\right) - 6} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{5}{2}}{\frac{4}{2} - 6} = \frac{\frac{1 + 20}{8}}{2 - 6}$$

$$= \frac{\frac{21}{8}}{-4} = -\frac{21}{32}$$

3. Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$ cuando $x \to 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 2x - 3)}{\lim\limits_{x \to 1}(x + 1)} = \frac{(1)^2 + 2(1) - 3}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Formas indeterminadas del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$

Al calcular el límite de un cociente, se ha observado que:

a) Si el numerador y el denominador tienen límite distinto de cero, el límite del cociente es igual al cociente de los límites (propiedad 6).

b) Si el límite del numerador es cero y el del denominador es diferente de cero, el límite del cociente es igual a cero (ejemplo 3).

c) Si el límite del numerador es diferente de cero y el del denominador es cero, el cociente no tiene límite y se establece que tiende a más o menos infinito ($\pm\infty$), según el caso (ejemplo 2).

d) Si los límites del numerador y del denominador son ambos iguales a cero, se tiene la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, que se denomina **indeterminada**, ya que cualquier valor numérico que se ponga como cociente cumple con la condición de que, multiplicado por el divisor, da lugar al dividendo. La indeterminación se puede eliminar mediante operaciones algebraicas sencillas, por ejemplo:

1. Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$ cuando $x \to 4$.

Al aplicar directamente la propiedad **6**, tenemos:

$$\left.\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \frac{\lim\limits_{x \to 4}(x^2 - x - 12)}{\lim\limits_{x \to 4}(x - 4)} = \frac{(4)^2 - (4) - 12}{4 - 4} = \frac{0}{0}\right\} \text{Se obtiene la forma indeterminada.}$$

Pero si factorizamos el numerador, tenemos:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to 4}(x+3)=4+3=7$$

Lo anterior da lugar a un caso adicional que es necesario conocer para el cálculo de límites.

2. Calcula el límite de la función $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+2}$ cuando $x\to -2$.

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x+1}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(2x^2-3x+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x+2)}=\frac{2(-2)^2-3(-2)+1}{-2+2}=\frac{15}{0}=+\infty$$

Caso II

A veces es necesario simplificar la expresión dada antes de sustituir directamente el valor de la variable independiente, ya que no hacerlo da lugar a la forma indeterminada $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. La transformación de la expresión dada se obtiene por medio de la factorización del numerador y en algunos casos es necesario factorizar el denominador.

Ejemplos

1. Calcula el límite de la función $y=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ cuando $x\to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}$$

2. Calcula el límite de $f(y)=\dfrac{y^3-27}{y^2-9}$ cuando $y\to 3$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{y^3-27}{y^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(y-3)}(y^2+3y+9)}{(y+3)\cancel{(y-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{y^2+3y+9}{y+3}=\frac{9+9+9}{3+3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

Al calcular el límite de $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ cuando $x\to 2$, al aplicar directamente la propiedad **6**, tenemos:

$$\left.\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2}=\frac{0}{0}\ \right\}\ \text{Se obtiene la forma indeterminada.}$$

Para eliminar la indeterminación es necesario multiplicar numerador y denominador por el binomio conjugado del numerador, es decir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x+2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Caso III

Para calcular el límite de una función dada es necesario simplificarla mediante la racionalización del numerador o del denominador antes de sustituir el valor de la variable independiente directamente en la expresión, ya que no hacerlo da lugar a la indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Ejemplos

1. Calcula el límite de $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(x+1)-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\sqrt{0+1}+1=2$$

2. Calcula el límite de $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ cuando $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{9-(x^2+5)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{9-x^2-5}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(4-x^2)}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\cancel{4-x^2}}=\lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)$$

$$=3+\sqrt{(2)^2+5}=3+\sqrt{9}=3+3=6$$

Uno de los límites más importantes en el estudio del cálculo diferencial para cualquier función se determina por la fórmula

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ejemplos

1. Dada $f(x)=ax^3$, determina $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

   Si $f(x)=ax^3$

$$f(x+h)=a\,(x+h)^3=ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax^3}+3ax^2h+3axh^2+ah^3-\cancel{ax^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3ax^2+3axh+ah^2)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(3ax^2+3axh+ah^2\right)=3ax^2+3ax(0)+a(0)^2=3ax^2$$

2. Dada $f(x) = x^2 - 3x + 5$, encuentra $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Si $f(x) = x^2 - 3x + 5$

$f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h) + 5 = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 5$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h+5-(x^2-3x+5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2\cancel{-3x}-3h\cancel{+5}\cancel{-x^2}\cancel{+3x}\cancel{-5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h-3)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h-3) = 2x+0-3 = 2x-3$$

3. Dada $f(x) = \sqrt{3x-1}$, determina $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Si $f(x) = \sqrt{3x-1}$

$f(x+h) = \sqrt{3(x+h)-1}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-1}-\sqrt{3x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{3(x+h)-1}-\sqrt{3x-1}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{3(x+h)-1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3(x+h)-1}+\sqrt{3x-1}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-1-(3x-1)}{h\sqrt{3(x+h)-1}+\sqrt{3x-1}} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3x}+\cancel{3h}-\cancel{1}-\cancel{3x}+\cancel{1}}{\cancel{h}\left(\sqrt{3(x+h)-1}+\sqrt{3x-1}\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3(x+0)-1}+\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

4. Dada $f(x) = \dfrac{1}{ax}$, determina $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Si $f(x) = \dfrac{1}{ax}$

$f(x+h) = \dfrac{1}{a(x+h)}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{a(x+h)}-\dfrac{1}{ax}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{ax-a(x+h)}{ax[a(x+h)]}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}-\cancel{ax}-\cancel{a}h}{\cancel{a}x\cancel{h}[(ax+h)]} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x[a(x+h)]} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x[a(x+0)]} = -\frac{1}{ax^2}$$

5. Dada $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, encuentra $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\text{Si}\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$f(x+h)=\frac{1}{\sqrt{2(x+h)}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2(x+h)}}-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{2(x+h)}}{\sqrt{2x}\sqrt{2(x+h)}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{2(x+h)}}{h\sqrt{2x}\sqrt{2(x+h)}}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{2(x+h)}}{h\sqrt{2x}\sqrt{2(x+h)}}\right)\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2(x+h)}}{h\sqrt{2x}+\sqrt{2(x+h)}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x-2(x+h)}{2xh\sqrt{2(x+h)}+2h(x+h)\sqrt{2x}}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2x}-\cancel{2x}-\cancel{2h}}{\cancel{2h}\left[x\sqrt{2(x+h)}+(x+h)\sqrt{2x}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\sqrt{2(x+0)}+(x+0)\sqrt{2x}}=\frac{-1}{x\sqrt{2x}+x\sqrt{2x}}=\frac{-1}{2x\sqrt{2x}}$$

6. Dada $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{2x-1}$, determina $\lim\limits_{h\to 0}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\text{Si}\ f(x)=\frac{x^2+3x}{2x-1}$$

$$f(x+h)=\frac{(x+h)^2-3(x+h)}{2(x+h)-1}=\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h}{2(x+h)-1}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2+2xh+h^2-3x+3h}{2(x+h)-1}-\dfrac{x^2-3x}{2x-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(2x-1)(x^2+2xh+h^2-3x-3h)-[2(x+h)-1](x^2-3x)}{(2x-1)[2(x+h)-1]}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{2x^3}+\cancel{4x^2h}+2xh^2\cancel{-6x^2}\cancel{-6xh}-\cancel{x^2}-2xh-h^2+\cancel{3x}+3h-\cancel{2x^3}+\cancel{6x^2}-\cancel{2x^2h}+\cancel{6xh}+\cancel{x^2}-\cancel{3x}}{(2x-1)[2(x+h)-1]}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2x^2h+2xh^2-2xh-h^2+3h}{(2x-1)[2(x+h)-1]}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x^2+2xh-2x-h+3)}{\cancel{h}(2x-1)[2(x+h)-1]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2x(0)-2x-0+3}{(2x-1)[2(x+0)-1]}=\frac{2x^2-2x+3}{(2x-1)(2x-1)}=\frac{2x^2-2x+3}{(2x-1)^2}$$

Límites infinitos y límites en el infinito

Si el valor de una función llega a crecer sin límite cuando x tiende a a, se dice que la función tiende a un límite infinito y se representa como:

$$\lim_{h\to 0} f(x)=\infty$$

Si la función crece sin límite **positivamente** cuando la variable tiende a a, la función tiende a $+\infty$; si la función decrece sin límite **negativamente** cuando la variable tiende a a, la función tiende a $-\infty$, lo cual se expresa como:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

Se dice que la función tiende a un límite cuando crece o decrece la variable independiente y ésta tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)= A$$

De lo anterior se concluye que existen ciertos límites que generalmente se presentan cuando la variable x tiende a cero o a infinito, los cuales se enuncian a continuación.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{c}{x}=\infty$ o $\frac{c}{0}=\infty$
2. $\lim_{x\to 0} cx=0$ o $c(0)=0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{c}=0$ o $\frac{0}{c}=0$
4. $\lim_{x\to} \frac{c}{x}=0$ o $\frac{c}{\infty}=0$
5. $\lim_{x\to\infty} cx=\infty$ o $c(\infty)=\infty$
6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{c}=\infty$ o $\frac{\infty}{c}=\infty$

Donde c es una constante diferente de cero.

Formas indeterminadas del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Cuando se tiene un cociente de polinomios y se hace que la variable x tienda a infinito, se pueden tener los siguientes casos:

a) Si el numerador tiende a infinito y el denominador tiene límite, el cociente tiende a infinito.

b) Si el numerador tiene límite y el denominador tiende a infinito, el cociente tiende a cero.

c) Si los límites del numerador y del denominador son ambos iguales a infinito, se tiene la forma indeterminada $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

La indeterminación se puede eliminar dividiendo ambos términos entre la variable de máxima potencia que interviene en la expresión. Como se verá a continuación.

1. Calcula el límite de la función $y=\dfrac{4x^3-5x^2+6}{7x-3x^2+9x^3}$ cuando $x\to\infty$.

Dividiendo numerador y denominador entre x^3, que es la máxima potencia de la variable en la expresión dada, resulta que;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+6}{7x-3x^2+9x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^3-5x^2+6}{x^3}}{\dfrac{7x-3x^2+9x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^3}}{\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{3}{x}+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{5}{\infty}+\dfrac{6}{(\infty)^3}}{\dfrac{7}{(\infty)^2}-\dfrac{3}{\infty}+9}=\frac{4-0+0}{0-0+9}=\frac{4}{9}$$

Caso IV

Cuando se desea obtener el límite de un cociente de polinomios y la variable independiente tiende a infinito, es necesario dividir el numerador y denominador entre la variable de mayor exponente que entra en el cociente antes de sustituir directamente el valor al que tiende dicha variable.

Ejemplos

1. Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-5x^2}{4x+8x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2-5x^2}{x^2}}{\dfrac{4x+8x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-5}{\dfrac{4}{x}+8}=\frac{\dfrac{2}{(\infty)^2}-5}{\dfrac{4}{\infty}+8}=\frac{0-5}{0+8}=-\frac{5}{8}$$

2. Calcula $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{3t+2xt^2+x^2t^3}{4-3xt-2x^3t^3}$.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{3t+2xt^2+x^2t^3}{x^2t^3}}{\dfrac{4-3xt-2x^3t^3}{x^2t^3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^2t^2}+\dfrac{2}{xt}+1}{\dfrac{4}{x^2t^3}-\dfrac{3}{xt^2}-2x}=\frac{\dfrac{3}{x^2(\infty)^2}+\dfrac{2}{x(\infty)}+1}{\dfrac{4}{x^2(\infty)^3}-\dfrac{3}{x(\infty)^2}-2x}$$

$$=\frac{0+0+1}{0-0-2x}=-\frac{1}{2x}$$

Existencia o inexistencia del límite

Una función $f(x)$, en algunos casos, no tenderá hacia un límite cuando x se acerque a un valor numérico particular. Por ejemplo:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ cuando $x=0$ se anula el denominador, por lo que decimos que el límite no está definido para $x=0$; por lo tanto, el límite no existe. Si registramos valores crecientes y decrecientes de x, se observa que:

$x>0$	2	1	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001 $\to$ 0
$\dfrac{1}{x}$	0.5	1	2	10	100	1000	10 000 $\to +\infty$

A medida que x se aproxima a cero, desde valores positivos la función $\frac{1}{x}$ crece más.

$x<0$	-2	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$-0.0001 \rightarrow$	0
$\frac{1}{x}$	-0.5	-1	-2	-10	-100	-1000	$-10000 \rightarrow$	$-\infty$

A medida que x se aproxima a cero desde valores negativos la función $\frac{1}{x}$ decrece más.

La existencia o inexistencia de un límite para una función $f(x)$ cuando $x \to a$, no depende del valor de la función en a. Tampoco es necesario que la función esté definida en a.

Si $\lim_{x\to a} f(x)=1$, el valor de L es un número al cual la función puede aproximarse arbitrariamente permitiendo que se aproxime lo suficiente a a.

El comportamiento de la función cerca de a y no su valor en a determina la existencia del límite.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ cuando $x>0$ y si $|x|=x$, el límite es igual a la unidad; cuando $x<0$ y si $|x|=-x$, el límite es igual a -1. Cuando $x\to 0$ la función $\frac{|x|}{x}$ tiende a dos valores diferentes, (1) y (-1), si x se acerca a cero con valores positivos o negativos.

Al no haber un límite único cuando $x\to 0$ se dice que $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ no existe.

Límites laterales

Permiten analizar el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un valor numérico dado por la derecha o por la izquierda.

Ejemplo

Dada $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>1 \\ x^2 & \text{si } x\leq 1\end{cases}$ el límite de $f(x)$ cuando x tiende a la unidad por la derecha, $f(x)$ tiende a dos; cuando x tiende a la unidad por la izquierda, $f(x)$ tiende a la unidad. Lo anterior se denota como:

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^+} f(x)=2}_{\text{Límite por la derecha}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\lim_{x\to 1^-} f(x)=1}_{\text{Límite por la izquierda}}$$

Asíntotas verticales y límites infinitos

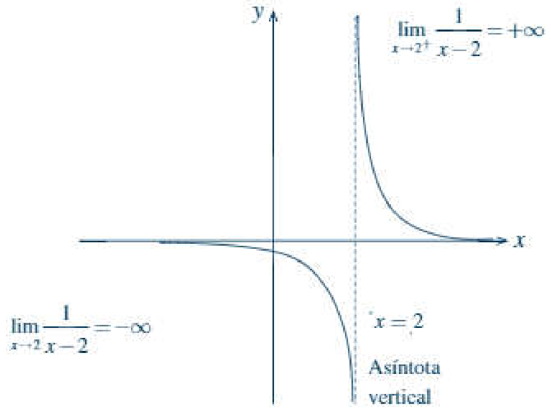
Si el valor de una función se hace infinito cuando $x\to a$ por la derecha o por la izquierda, se dice que la función tiene un **límite infinito** y su gráfica una **asíntota vertical**, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

Ejemplo

Sea $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$. Si determinamos la tabla de valores y su gráfica, tenemos que:

x	0	1	1.5	1.9	→ 2 ←	2.1	2.5	3	4
f(x)	−0.5	−1	−2	−10	→ −∞, +∞ ←	10	2	1	0.5



Si x se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ decrece; si x se aproxima a 2 por la derecha, $f(x)$ crece; es decir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=-\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$$

La recta $x=2$ se denomina **asíntota vertical** de la función. Para una función puede haber cuatro tipos posibles de límites infinitos, que son:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ *c*) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ *d*) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

Asíntota vertical par

Resulta cuando los dos límites laterales de la función en a son infinitos y del mismo signo.

Asíntota vertical impar

Resulta cuando los dos límites laterales de la función en a son infinitos y de signo contrario. Una asíntota vertical se presenta cuando un cociente tiene denominador nulo, siendo el numerador distinto de cero; en el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$, la razón indefinida $\dfrac{1}{0}$ se puede considerar $(+\infty)$ o $(-\infty)$, según el sentido por el que se tiende a cero como valor límite.

Asíntotas horizontales y límites infinitos

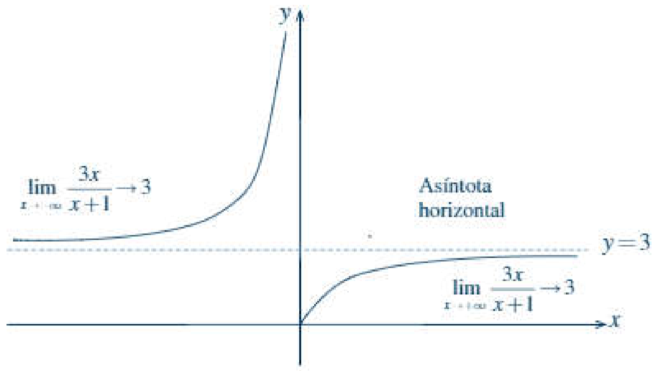
Si el valor de una función tiende o se hace finito cuando x crece o decrece infinitamente, se dice que la función tiene un límite en el infinito y su gráfica tiene una asíntota horizontal. Es decir, se cumple que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

Ejemplo

Sea $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$. Al determinar la tabla de valores y su gráfica, tenemos que:

x	$-\infty$	-100	-10	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	10	100	$+\infty$
f(x)	3	3.03	3.3	3.5	3.75	4.5	$+\infty$	0	1.5	2.25	2.5	2.625	2.72	2.97	3



El valor de $f(x)$ tiende a 3 cuando $x\to+\infty$; el valor de $f(x)$ tiende a 3 cuando $x\to-\infty$; es decir:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\to 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\to 3$$

La recta $y=3$ se denomina **asíntota horizontal** de la función.

Asíntota horizontal por la derecha

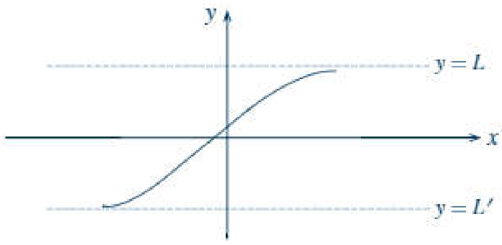
Resulta cuando la gráfica de la función se aproxima a la línea horizontal ($y=L$) a medida que x crece sin límite ($x\to+\infty$).

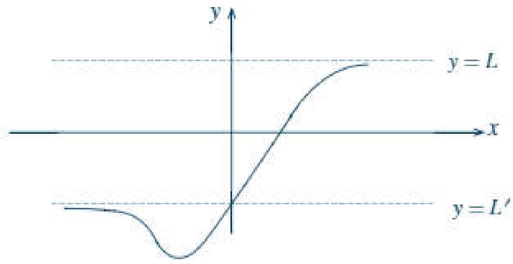
Asíntota horizontal por la izquierda

Resulta cuando la gráfica de la función se aproxima a la línea horizontal ($y=L$) a medida que x decrece sin límite ($x\to-\infty$).

Una función puede tender hacia una o más asintotas horizontales; también es posible que una función corte su propia asíntota horizontal.

Ejemplos





EJERCICIO 7

I. Aplica directamente las propiedades de los límites y calcula los siguientes límites, si existen.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. $\lim\limits_{x\to 3} x^2$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(4x+5)$
3. $\lim\limits_{x\to -2}(5x-2)$
4. $\lim\limits_{x\to 4} 6$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} x$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-1}{4x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)$
8. $\lim\limits_{x\to -1} 5x$
9. $\lim\limits_{x\to -2} 3x^2$
10. $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-8x+5)$
11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{2x+3}$
12. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{3x^2+4}$

II. Aplica el artificio algebraico del caso II y resuelve los siguientes límites que presentan la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2-2x}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{x^2-25}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$
6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{x-3}$
8. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x+4}$
9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{x-2}$
10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$
11. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^2-25}$
12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

III. Aplica el artificio algebraico del caso III y resuelve los siguientes límites que presentan la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

4. $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

6. $\lim_{x\to 5}\frac{25-x^2}{3-\sqrt{x^2-16}}$

7. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

8. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}-1}$

9. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

10. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{2+\sqrt{x^2+3}}$

IV. Para cada una de las siguientes funciones dadas, determina $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

1. $f(x)=mx^2$
2. $f(x)=ax^2+bx+c$
3. $f(x)=\frac{1}{x}$
4. $f(x)=5x^3$
5. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
6. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
7. $f(x)=2x^2+7x-1$
8. $f(x)=x^3+5x-3$
9. $f(x)=\sqrt{ax+b}$
10. $f(x)=3x^2-5x$
11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax}}$
12. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$
13. $f(x)=\sqrt{x+9}$
14. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$
15. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{8x+1}}$
16. $f(x)=\sqrt{2x-1}$

V. Aplica el artificio algebraico del caso IV y resuelve los siguientes límites que presentan la forma indeterminada $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

1. $\lim_{t\to\infty}\frac{2t^3-3t^2+4}{5t-t^2-7t^3}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{7-3x^2}{5x+9x^2}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{3x+5}$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+1}{4x^3+5x-7}$
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{4+x-5x^2}$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{8x-3}$
7. $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x+2}{8x^2-5x+3}$
8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-5}{4x^3-3}$
9. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3+3}$
10. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-x-12}$

VI. Determina gráficamente las asíntotas vertical u horizontal de las siguientes funciones.

1. $f(x)=x^3$
2. $f(x)=\frac{2x-5}{3x+2}$
3. $f(x)=\frac{2x-3}{2x^2+3x-5}$
4. $f(x)=\frac{3x-1}{3x^2+5x-2}$
5. $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
6. $f(x)=\frac{3x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

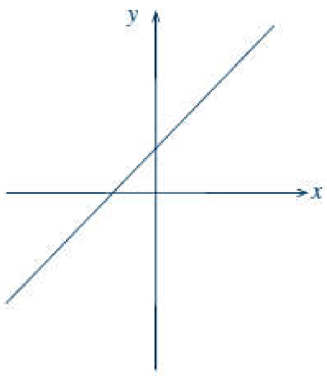
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Continuidad de una función

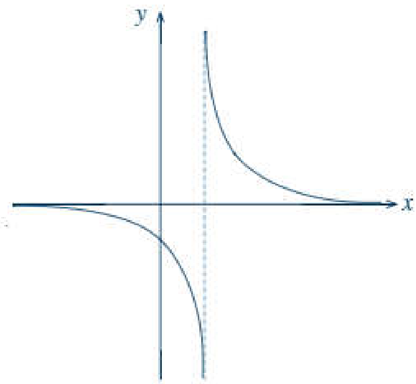
Noción de la continuidad de una función

Una función es **continua** si su gráfica presenta la ausencia de vacíos o saltos, es decir, que se traza sin despegar el lápiz del papel.

Ejemplos



Función continua



Función discontinua

Definición Una función $f(x)$ es continua para el valor $x = a$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe o está definida.
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si al menos una de estas condiciones no se satisface, la función es discontinua para el valor de $x = a$.

Ejemplo

Investiga si la función $f(x) = 5x - 2$ es continua para $x = 3$.

Primero se tiene que determinar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la función está definida; efectuando el análisis correspondiente, se observa que la función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

De lo anterior, tenemos que

si $f(x) = 5x - 2$ para $f(3) = 5(3) - 2$
$f(3) = 13$

$\therefore$ Se satisface la primera condición, es decir, $f(3) = 13$ la función existe y está definida.

Para la segunda condición, tenemos que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(5x - 2) = 13 \text{ (existe)}$$

Se observa que también se satisface.

Para la tercera condición, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3} f(x) &= f(3) \\ 13 &= 13 \end{aligned}\right\} \therefore \text{ Se satisface la tercera condición}$$

Al satisfacerse las tres condiciones básicas, concluimos que la función $f(x) = 5x - 2$ es continua para $x = 3$.

La función $f(x) = x^2$ es continua en el punto $x = 2$, ya que:

1. $f(2) = (2)^2 = 4$ 2. $\lim_{x \to 2} f(x) = (2)^2 = 4$ 3. $\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$

La primera condición nos indica que una función es continua únicamente en puntos de su dominio de definición; por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ no es continua en $x = 4$ puesto que $f(4)$ es imaginario, por lo que la función no está definida en dicho punto.

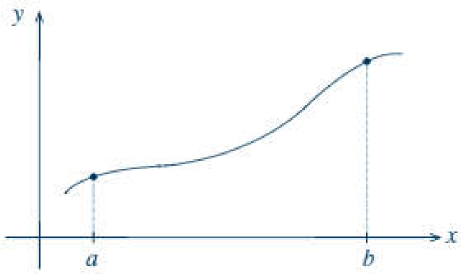
Una función es continua en un intervalo abierto o cerrado, cuando es continua en todos los puntos del intervalo. Del mismo modo, se dice que una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición; toda función polinomial es una función continua. También son funciones continuas las expresiones de e^x, sen x y cos x.

Cuando el dominio de definición de una función es un intervalo cerrado $a \le x \le b$, la segunda condición de continuidad no se cumple en los extremos a y b, por ello se utiliza la continuidad por la izquierda y por la derecha.

Una función $f(x)$ es continua sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ si:

1. $f(x)$ es continua por la derecha en a.
2. $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo abierto (a,b).
3. $f(x)$ es continua por la izquierda en b.

La gráfica de una función continua sobre un intervalo cerrado es:



La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua, ya que el dominio de definición es el intervalo $-2 \le x \le 2$; si a es un número cualquiera del intervalo abierto $-2 < x < 2$, el $\lim_{x \to a} \sqrt{4 - x^2}$ existe y es igual a $\sqrt{4 - a^2}$.

Si consideramos que $a = 2$, cuando x tiende a 2 por la izquierda sabemos que $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$; cuando x tiende a 2 por la derecha sabemos que $\lim_{x \to 2^x} \sqrt{4 - x^2}$ no existe, ya que resulta un número imaginario.

La discontinuidad de una función puede ser **evitable** y **no evitable**.

Ejemplos

1. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ se establece que es discontinua en el punto $x = 3$, ya que:

   a) $f(3)$ no está definida, por anularse el numerador y el denominador.

   b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$, la discontinuidad en $x = a$ es evitable si f se redefine en $x = a$.

De lo anterior hacemos el siguiente análisis:

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ para $f(3)=\dfrac{9-9}{3-3}=\dfrac{0}{0}$; esta indeterminación se evita al factorizar la expresión del numerador, es decir: $f(x)=\dfrac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}$ resultando $g(x)=x+3$.

Las curvas representativas de $f(x)$ y $g(x)$ son iguales, excepto en el punto $x=3$; la primera $f(x)$ presenta un **vacío** y la segunda $g(x)$ trata en forma adecuada de llenar el vacío de la anterior.

2. Dada $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, se establece que es discontinua en el punto $x=1$, ya que:

   a) $f(1)$ no está definida, por anularse el denominador.

   b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ no existe.

La discontinuidad en $x=a$ no es evitable ya que no existe el límite, es decir, la función es continua en todos los puntos excepto en $x=1$, en el que presenta una **discontinuidad infinita**.

Propiedades de las funciones continuas

De las propiedades de los límites se deducen las propiedades de las funciones continuas; es decir, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $x=a$, las funciones siguientes son también continuas en a:

1. $f(x)\pm g(x)$.
2. $cf(x)$, donde c es una constante arbitraria.
3. $f(x)\cdot g(x)$.
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(a)\neq 0$.
5. $f(g(x))$, al suponer que $f(x)$ es continua en $g(a)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Discute la continuidad de

$$f(x)=\begin{cases}10-x & -1\le x\le 3\\ x^2-2 & 3< x\le 4\end{cases}$$

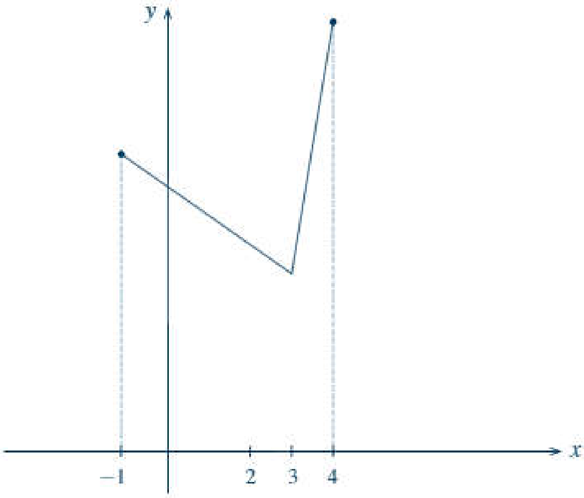
Solución

Las funciones polinomiales $10-x$ y x^2-2 son continuas en los intervalos $[-1,3)$ y $(3,4]$ respectivamente; de lo anterior se deduce que $f(x)$ es continua en todo el intervalo $[-1,4]$. Sólo se requiere analizar su comportamiento para $x=3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(10-x)=7 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2-2)=7$$

Como ambos límites son iguales, se tiene que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=7$; en consecuencia, $f(x)$ es continua en todo el intervalo $[-1,4]$.

Representación gráfica de $f(x)$.



2 ●●• Discute la continuidad de $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & x\neq 2\\ 2 & x=2\end{cases}$ en toda la recta.

Solución

La función racional $g(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ está definida para $x\neq 2$ y es continua para todo número real de su dominio de $x\neq 2$.

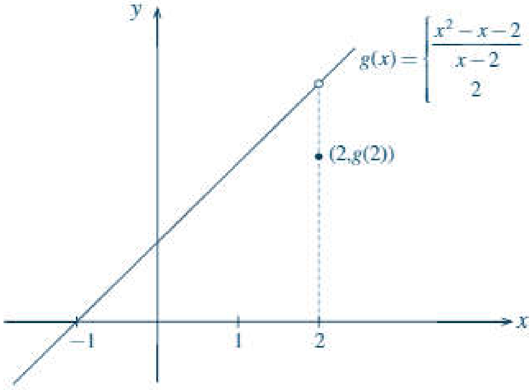
De lo anterior, sólo es necesario analizar la continuidad en $x=2$.

Para $\neq 2$ tenemos:

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}}$$
$$=\lim_{x\to 2} x+1=2+1=3$$

Como $g(2)=3$, entonces el valor del límite cuando $x\to 0$ es distinto del valor de; $g(2)$, en consecuencia, $f(x)$ es discontinua en $x=2$.

Representación gráfica de $g(x)$.



3 ●•·Discute la continuidad de $f(x)=\sqrt{3-x}$.

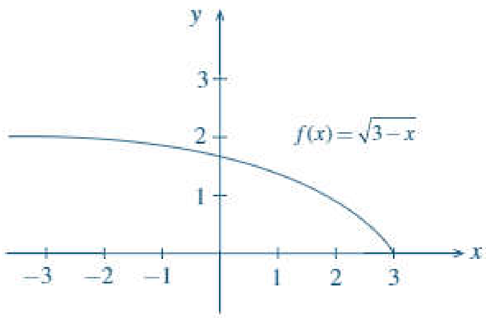
Solución

La función $f(x)$ está definida para todo $x \leq 3$, también se establece que $f(x)$ es continua en $x=3$ por la izquierda, ya que:

$$f(3)=\sqrt{3-3}=0 \qquad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=0$$
$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x)=0=f(3)$$

Para todo valor de $x<3$ la función dada satisface los requisitos de una función continua en el intervalo $(-\infty,3]$.

Representación gráfica de $f(x)$.



4 ●•·Discute la continuidad de la función parte entera $f(x)=[x]$.

Solución

x	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2	2.5	2.9	3
f(x) = [x]	−3	−3	−2	−2	−1	−1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3

A partir de la tabla se observa que la función tiene una discontinuidad de **salto** en cada entero, es decir:

$$\lim_{x\to 1^-}[x]=0 \text{ mientras que } \lim_{x\to 1^+}[x]=1$$

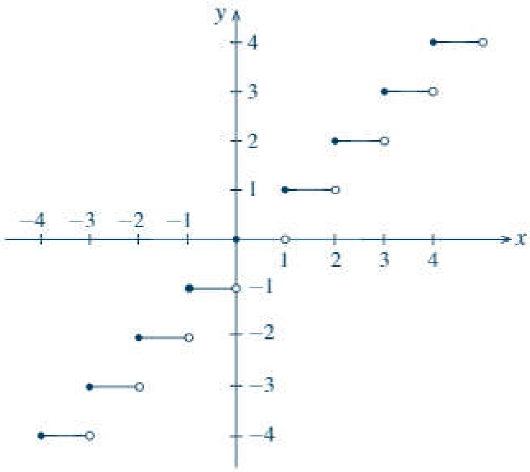
La función $f(x)=[x]$ es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda en cada entero, ya que para cualquier número entero tenemos que:

$$\lim_{x\to a^+}[x]=a=f(a) \ \text{(continua por la derecha)}$$

$$\lim_{x\to a^-}[x]=a-1\neq f(a) \ \text{(discontinua por la izquierda)}$$

También la función $f(x) = [x]$ es continua en cualquier número que no sea entero, ya que es constante en cada intervalo $(a, a + 1)$, donde a es un entero.

Representación gráfica de $f(x)$.



Una aplicación de la función parte entera es:

1. ¿Cuántos hermanos tienes?
2. ¿Cuántos años tienes?
3. ¿Cuántos hijos tiene la familia de tu mejor amigo?

EJERCICIO 8

I. En tu cuaderno, responde con tus propias palabras las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Cómo es la gráfica de una función continua?
2. Escribe la definición de una función continua.
3. ¿Qué es una función discontinua?
4. Explica en qué cosiste la continuidad de una función en un intervalo abierto o cerrado.
5. Cita los requisitos para la continuidad de una función sobre un intervalo cerrado.
6. Explica cuándo la discontinuidad de una función es **evitable** y cuándo es **no evitable**.
7. Escribe las propiedades de las funciones continuas.

II. En grupo y con asesoría de su profesor, discutan la continuidad de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

5. $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-25}$

6. $f(x)=\dfrac{x^2-49}{x-7}$

7. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+x-12}$

8. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x-10}$

9. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-5x+4}$

10. $f(x)=\begin{cases} x & x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} 3-2x & x<1 \\ x & x\le 1 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} -4x & x\le 2 \\ 2x^2-8x+2 & x>2 \end{cases}$

13. $f(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}$

14. $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x-5}$

15. $f(x)=[x-1]$

16. $f(x)=x-[x]$

17. $f(x)=\dfrac{5}{x^3-8}$

18. $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$

19. $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

20. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Calcula el límite de la función $g(x)=\dfrac{x^3+9x^2+29x+36}{x^2-16}$ cuando $x \to 3$ aplicando el artificio algebraico del caso II.

2. Determina $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada una de las siguientes funciones.

   a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

   b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3}{3+x}$

   c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5a}{\sqrt{x+a}}$

3. Aplicando el caso IV, resuelve los límites siguientes.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{33-25x^2}{14x+5x^2}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4x^2-17}{9x^4-6x^2+3x-1}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{100x-99}{25x}$

4. Discute la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{5}{x^4-16}$

b) $g(x)=\frac{|x-11|}{x-11}$

c) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<1 \\ \sqrt{x+1} & x\geq 1 \end{cases}$

d) $g(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \\ x-1 & 2<x<4 \end{cases}$

UNIDAD 3

Derivación de funciones

Evaluación diagnóstica

1. ¿Qué entiendes por derivada de una función?

2. Encuentra la derivada de las siguientes funciones y determina el valor de y cuando $x = -2$.

   a) $y = 12x^4 + 11x^2 - 10$

   b) $y = 5x + \dfrac{1}{3x^3}$

3. ¿Cómo se representa geométricamente la derivada de una función?

4. Indica si las funciones siguientes están en forma implícita o explícita. En caso de estar en forma implícita, reordénala de tal manera que sea una función explícita.

   a) $4x^2 + 13xy - 4y^2 = 14$

   b) $\sqrt{x^2 + 3y^2} - 12 = 3$

   c) $x\sqrt{2+3y} + y\sqrt{1+y} = y$

   d) $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

5. Encuentra la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

   a) $y = \operatorname{sen} 7x \cos 2x$

   b) $f(x) = \ln(\cos 5x)$

Derivación de funciones

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la definición de la derivada como razón de cambio.
- Conozca la definición de la derivada como pendiente de una curva.
- Conozca la notación de la derivada.
- Maneje las diferentes reglas o fórmulas para la derivación de funciones.
- Realice demostraciones de las fórmulas fundamentales de derivación.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Rapidez de variación y rapidez de variación instantánea.
- Regla general para la derivación (regla de los cuatro pasos).
- Reglas o fórmulas de derivación para funciones algebraicas.
- Pendiente de la recta tangente a una función en un punto.
- Regla de la cadena para derivar funciones compuestas.
- Derivación de funciones implícitas.
- Derivación de funciones trascendentes.
- Derivadas sucesivas.

Contenidos procedimentales

- Distinguirá el concepto de derivada de una función, así como su representación geométrica.
- Identificará diferencias entre los distintos tipos de funciones y como obtener sus derivadas en cada caso.
- Resolverá y argumentará si una función es implícita o explícita.

Contenidos actitudinales

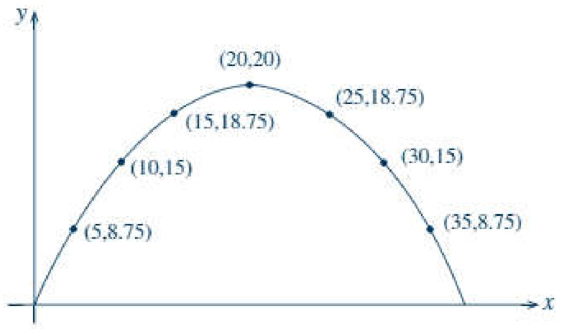
- Expresará ideas utilizando conceptos de derivación de funciones.
- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Rapidez de variación y rapidez de variación instantánea

La derivada como razón de cambio

Existen variadas aplicaciones sobre el conocimiento de **razón de cambio**. Por ejemplo, los índices de reprobación en matemáticas, la tasa de deserción escolar, los costos de producción y la fuerza de los vientos huracanados.

Las razones de cambio se refieren por lo general a cambios respecto al tiempo, pero se puede buscar la razón de cambio respecto de cualquier variable relacionada. Por ejemplo, si disparamos un proyectil cuya trayectoria se representa por la ecuación $y = -0.05x^2 + 2x$ se observa que la razón de cambio de la altura y del proyectil aumenta a medida que aumenta su distancia horizontal x.



Si $x = 5$ la altura es $y = 8.75$; si $x = 15$ la altura del proyectil es $y = 18.75$; el cociente de diferencias de la función y al pasar de $x = 5$ a $x = 15$, es:

$$\frac{\text{Cambio de altura } (y)}{\text{Cambio de distancia } (x)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18.75 - 8.75}{15 - 5} = 1$$

El cociente de diferencias de y al pasar de $x = 10$ a $x = 20$, es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 15}{20 - 10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Conclusión. Por lo general, se puede calcular el cociente de diferencias de y con respecto de x en un intervalo Δx mediante la siguiente regla:

$$\frac{\text{Cambio en y}}{\text{Cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{"Cociente de diferencias"}$$

Si nos interesa la razón de cambio **exacta** de y para valores particulares de x. Por ejemplo, cuando $x = 5$, ¿cuál es la razón de crecimiento de y por cada unidad de incremento en x?

La razón de cambio de y en un valor concreto de x se denomina **razón de cambio instantáneo** de y con respecto a x, la cual se calcula al hacer $\Delta x \to 0$.

Ejemplo

Para la ecuación $y = -0.05x^2 + 2x$ se puede elaborar una tabla que contenga los cambios que sufren ambas variables, así como el cociente de diferencias a medida que el incremento en x se hace cada vez más pequeño, es decir,

x	Δx	$x + \Delta x$	$\Delta y = (x + \Delta x) - f(x)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
5	1	6	1.45	1.45
5	0.1	5.1	0.1495	1.495
5	0.01	5.01	0.014995	1.4995
5	0.001	5.001	0.00149995	1.49995
5	0.0001	5.0001	0.00015000	1.5000

De la tabla anterior se observa que el cociente de incrementos se aproxima a 1.5 cuando $\Delta x \to 0$.

De acuerdo al análisis anterior se puede definir que la razón de cambio instantáneo de y en x se representa mediante la siguiente ecuación:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dicha ecuación es la definición formal de la derivada que puede considerarse *como una razón de cambio instantáneo de una variable con respecto a otra*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el cociente de diferencias de la función $f(t) = 3t + 9$ entre los dos puntos (1,12) y (2,15), y compara el cociente de diferencias con la razón de cambio instantáneo de cada punto.

Solución

El cociente de diferencias de $f(t)$ al pasar de $t = 1$ a $t = 2$, es:

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{15 - 12}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

La razón de cambio instantáneo de $f(t)$ en t se determina por: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{3(t + \Delta t) + 9 - (3t + 9)}{\Delta t} = \frac{3t + 3\Delta t + 9 - 3t - 9}{\Delta t} = \frac{3\Delta t}{\Delta t} = 3$$

$\therefore$ Para toda t se tiene: $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = 3$ y en particular para $t = 2$: $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = 3$.

2 Se lanza una pelota cuya trayectoria se define por la ecuación $y = x - 0.02x^2$, determina:

a) La gráfica de la trayectoria.

b) La distancia horizontal total que recorre la pelota.

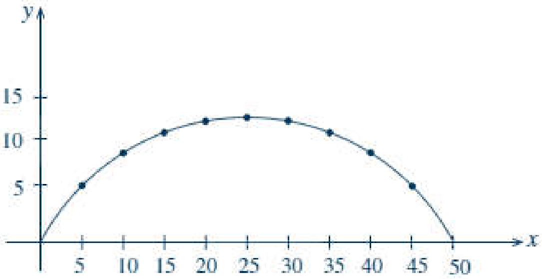
c) Por medio de la simetría de la trayectoria, ¿cuál es el valor de x para que la pelota alcance su máxima altura?

d) La ecuación que indica la razón de cambio instantáneo de la altura de la pelota respecto al cambio horizontal en $x = 0, 10, 15, 25, 30, 50$.

e) ¿Cuál es la razón de cambio instantáneo de la altura cuando la pelota alcanza su altura máxima?

Solución

a) La representación gráfica de la trayectoria cuya ecuación es: $y = x - 0.02x^2$ es:



x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y	0	4.5	8	10.5	12	12.5	12	10.5	8	4.5	0

b) Analizando la gráfica se observa que:

Cuando $x = 0$, $y = 0$, y para $x = 50$, $y = 0$, por lo que la distancia horizontal total que recorre la pelota es $x = 50$ unidades.

c) Con base en la tabla y gráfica anteriores, se observa que por simetría la trayectoria de la pelota alcanza su máxima altura cuando x alcanza un valor de 25 unidades.

d) Si $y = x - 0.02x^2$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x) - 0.02(x + \Delta x)^2$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - 0.02x^2 - 0.04x\Delta x - 0.02(\Delta x)^2 - (x - 0.02x^2)$$

$$= \cancel{x} + \Delta x - \cancel{0.02x^2} - 0.04x\Delta x - 0.02(\Delta x)^2 - \cancel{x} + \cancel{0.02x^2}$$

$$= \Delta x - 0.04x\Delta x - 0.02(\Delta x)^2 = \Delta x(1 - 0.04x - 0.02\Delta x)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(1 - 0.04x - 0.02\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 1 - 0.04x - 0.02\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1 - 0.04x - 0.02.(0) = 1 - 0.04x$$

Para $x = 0$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(0) = 1 - 0.04(0) = 1 - 0 = 1$$

Para $x = 10$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(10) = 1 - 0.04(10) = 1 - 0.4 = 0.6$$

Para $x = 15$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(15) = 1 - 0.04(15) = 1 - 0.6 = 0.4$$

Para $x = 25$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(25) = 1 - 0.04(25) = 1 - 1 = 0$$

Para $x = 30$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(30) = 1 - 0.04(30) = 1 - 1.2 = -0.2$$

Para $x = 50$, se tiene que:

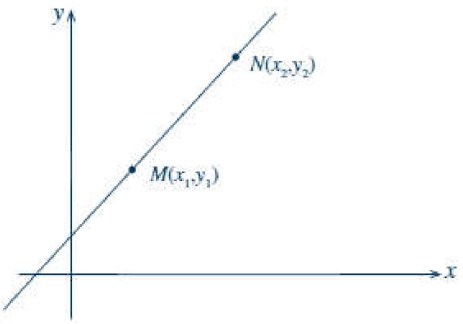
$$\frac{dy}{dx} = f'(50) = 1 - 0.04(50) = 1 - 2 = -1$$

e) La razón de cambio instantáneo cuando la pelota alcanza su máxima altura es $x = 25$. Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = f'(25) = 1 - 0.04(25) = 1 - 1 = 0$$

La derivada como pendiente de una curva

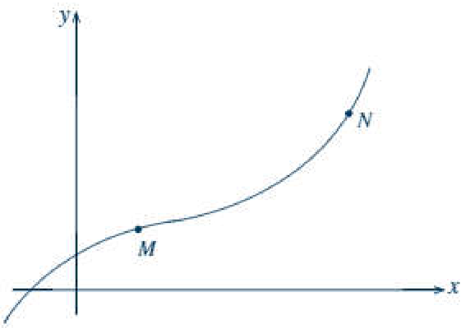
La pendiente de una recta que pasa por dos puntos cualquiera $M(x_1,y_1)$ y $N(x_2,y_2)$ se determina por:



$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

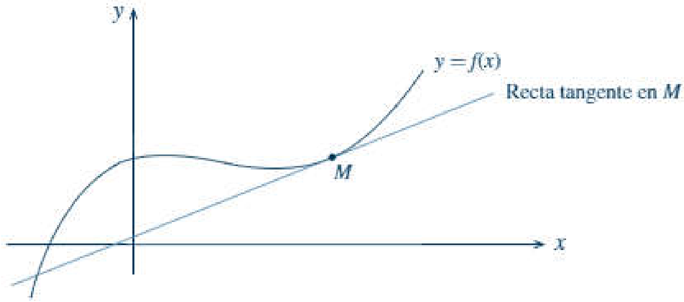
La pendiente de una recta es constante en cualquiera de sus puntos que la constituyen, es decir, la recta tiene la misma pendiente en M que en N.

Para una curva que no es recta, la pendiente no es constante en ningún punto de la curva. Es decir, la pendiente varía de un punto a otro punto.

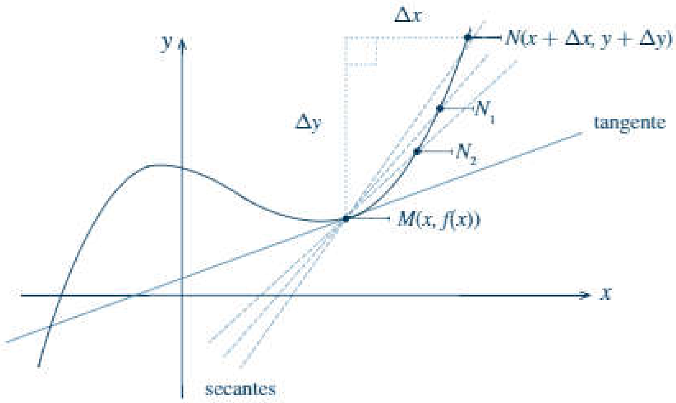


La curva tiene más pronunciada su pendiente en el punto N que en el punto M; por lo tanto, ésta no es constante en ningún punto de la curva.

Para determinar la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto M, se aplica la definición de **recta tangente** a la curva en dicho punto. Al referirnos a la recta tangente a una curva, se entiende que la recta es tangente en un punto específico de la curva, sin importar que la recta corte a la curva en algún otro punto.



Consideremos a continuación la **recta secante** que pasa por los puntos M y N de la gráfica de $y = f(x)$, es decir:



Si suponemos que el punto N se acerca hacia M sobre la curva, dando lugar a rectas secantes sucesivas desde N hasta M, se observa que cuando N se aproxima más y más a M, las rectas secantes tienden a una posición límite en la que se encuentra la **recta tangente a la curva en M**; de lo anterior se deduce que **la pendiente de la recta tangente es el valor límite de las pendientes de las rectas secantes, cuando N tiende a M**.

$$m_{\text{tangente}}\ \theta = \lim_{N \to M} m_{\text{secante}}$$

La pendiente de la recta secante que pasa por M y N es:

$$m_{\text{secante}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

cuando $N \to M$, entonces, $\Delta x \to 0$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es:

$$m_{\text{tangente}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Definición de la pendiente de una curva en un punto

En un punto de coordenadas $(x, f(x))$ la pendiente m de la gráfica de $y = f(x)$ es igual a la pendiente de su recta tangente en dicho punto y se determina por:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Al suponer que el límite existe se aplica el procedimiento denominado **regla de los cuatro pasos** para calcular la pendiente de la tangente a una curva.

Ejemplos

1. Si $y = f(x)$, al dar un incremento de Δx a x para la función y también se obtiene un incremento Δy, es decir:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

2. Para determinar el incremento de la función se restan las expresiones anteriores, es decir:

$$\begin{array}{r} \cancel{y} + \Delta y = f(x+\Delta x) \\ -\cancel{y} \qquad = -f(x) \\ \hline \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \end{array}$$

3. La expresión resultante se divide entre el incremento de la variable independiete Δx para dar lugar a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. El límite del cociente de diferencias resultante cuando $\Delta x \to 0$, es por definición, la derivada o la pendiente de la tangente a la curva de la función que se expresa por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m$$

Este límite permite definir a la **derivada** como un elemento fundamental del cálculo diferencial.

Derivada de una función

La derivada de una función de una variable es el límite del cociente del incremento de la función sobre el incremento de la variable independiente cuando éste último tiende a cero. Si el límite de este cociente existe, se dice que la función es diferenciable o que tiene derivada.

Notación de la derivada

Para denotar la derivada de una función $f(x)$, se utiliza el símbolo $f'(x)$. También se puede hacer uso de la notación $\frac{dy}{dx}$, o bien, puede usarse la forma abreviada y' para representar la derivada de la función y.

Si a una función se le antepone el símbolo $\frac{d}{dx}$ se entiende que dicha función debe derivarse con respecto a x; la notación Dx se usa en lugar de $\frac{d}{dx}$. Lo anterior determina la siguiente identidad,

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}[f(x)]=Dx\,(f(x)).$$

Resumen de simbologías para representar la derivada

a) $f'(x)$ representa la derivada de $f(x)$.

b) $\frac{dy}{dx}$ indica la derivada de y con respecto a x.

c) y' es una forma abreviada de $\frac{dy}{dx}$.

d) $\frac{d}{dx}[f(x)]$ indica la derivada de $f(x)$ con respecto a x.

e) Dx se emplea en lugar de $\frac{d}{dx}$.

EJERCICIO 9

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Responde con tus propias palabras las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se puede calcular el cociente de diferencias de una función?
2. ¿Qué es la razón de cambio instantáneo?
3. Escribe la ecuación de la razón de cambio instantáneo de y en x.
4. ¿Por qué la pendiente de una recta es constante en cualquiera de sus puntos?
5. ¿Por qué la pendiente de una curva no recta no es constante en cualquiera de sus puntos?
6. ¿Qué se entiende por recta tangente a una curva?
7. ¿Qué se entiende por recta secante a una curva?
8. Define la pendiente de una curva en un punto.
9. Define la derivada de una función.
10. Describe la notación de la derivada.

II. Determina el cociente de diferencias de cada una de las funciones entre los dos puntos dados; compara este cociente de diferencias con la razón de cambio instantáneo de cada punto.

1. $f(x) = 5x + 11$; $(1,16)$, $(2,21)$
2. $f(x) = 2x - 3$; $(0,-3)$, $\left(\frac{3}{2},0\right)$
3. $f(x)=\frac{x}{x+1}$; $(0,0)$, $\left(3,\frac{3}{4}\right)$
4. $f(x) = 3x^2 + 5$; $(1,8)$, $(2,17)$
5. $h(x) = x^3 - 2x + 7$; $(-1,8)$, $(1,6)$
6. $g(x)=\sqrt{x^2-1}$; $(1,0)$, $\left(3,\sqrt{8}\right)$
7. $f(t)=\sqrt{t^2-9}$; $(3,0)$, $\left(4,\sqrt{7}\right)$
8. $g(u)=\sqrt{u^2-25}$; $(5,0)$, $\left(6,\sqrt{11}\right)$
9. $h(x) = x^2 - 6x - 1$; $(-1,6)$, $(3,-10)$
10. $f(x) = x^3 + 4x$; $(0,0)$, $(0.1,0.401)$

III. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Se dispara un proyectil a nivel del suelo con un ángulo de 45°, la ecuación de su trayectoria es:

$$y = x - \frac{32}{v_0^{\,2}}(x^2)$$

Siendo la velocidad inicial (v_0) en m/s.

a) Elabora la gráfica de la trayectoria del proyectil.

b) Determina la coordenada de la abscisa en que el proyectil toca el suelo.

c) Por simetría indica el valor de x en que el proyectil alcanza su máxima altura.

d) ¿Cuál es la razón del cambio instantáneo de la altura cuando el proyectil se encuentra a su máxima altura?

2. Dada $f(x) = -0.009x^2 + x$, calcula la razón de cambio $f(x)$ respecto de x cuando $x = 10$ y cuando $x = 50$.

3. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a s metros sobre el suelo después de t segundos de ser encendido, donde $s = 560t - 16t^2$ (considera la dirección positiva hacia arriba), encuentra:

a) La velocidad del cohete a los 2 segundos después del encendido.

b) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar su altura máxima?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Regla general para la derivación (regla de los cuatro pasos)

Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función y la derivada de una función se definen por el mismo límite, se puede calcular la derivada o coeficiente diferencial por la regla de los cuatro pasos, la cual se denomina **regla general para la derivación** y comprende los siguientes pasos:

1. En la función dada $y = f(x)$, se sustituye x por $(x + \Delta x)$ y se determina el nuevo valor de la función $(y + \Delta y)$.
2. Se obtiene el incremento de la función (Δy) mediante la resta del valor de la función $f(x)$ al nuevo valor de la función $f(s + \Delta x)$.
3. El incremento de la función (Δy), se divide entre el incremento de la variable independiente (Δx).
4. Se determina el límite de esta razón cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero $(\Delta x \to 0)$; el límite resultante es la derivada de la función dada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $y = x^2 + 3$.

Si $\quad y = x^2 + 3$

$$\left. y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3 \right\} \text{ Primer paso}$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{y} + \Delta y &= (\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \cancel{3} \\ -\cancel{y} \quad &= -\cancel{x^2} - \cancel{3} \\ \hline \Delta y &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}\right\} \text{Segundo paso}$$

$$\Delta y = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x + \Delta x \right\} \text{Tercer paso}$$

$$\left.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 0 = 2x \right\} \text{Cuarto paso}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

2 ●●•Encuentra la derivada de la función $y = 2x^3 - 3x + 9$.

Si $\quad y = 2x^3 - 3x + 9$

$$\left. y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) + 9 \right\} \text{Primer paso}$$

$$y + \Delta y = 2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 3x - 3\Delta x + 9$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{y} + \Delta y &= \cancel{2x^3} + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - \cancel{3x} - 3\Delta x + \cancel{9} \\ -\cancel{y} \quad &= -\cancel{2x^3} + \cancel{3x} - \cancel{9} \\ \hline \Delta y &= 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 - 2(\Delta x)^3 - 3\Delta x \end{aligned}\right\} \text{Segundo paso}$$

$$\Delta y = \Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3]$$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3]}{\cancel{\Delta x}} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3 \right\} \text{Tercer paso}$$

$$\left.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x(0) + 2(0)^2 - 3 = 6x^2 - 3 \right\} \text{Cuarto paso}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 3$$

3 ●●•Encuentra la derivada de la función $y = \frac{4}{x^2}$.

Si $\quad y = \frac{4}{x^2}$

$$\left. y + \Delta y = \frac{4}{(x + \Delta x)^2} \right\} \text{Primer paso}$$

$$\cancel{y}+\Delta y=\frac{4}{(x+\Delta x)^2}$$

$$-\cancel{y}\quad=-\frac{4}{x^2}$$

$$\Delta y=\frac{4}{(x+\Delta x)^2}-\frac{4}{x^2}$$

Segundo paso

$$\Delta y=\frac{4x^2-4(x+\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}=\frac{4\cancel{x^2}-4\cancel{x^2}-8x\Delta x-4(\Delta x)^2}{x^2(x+(x+\Delta x)^2}=\frac{-\Delta x(8x+4\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\cancel{\Delta x}(8x+4\Delta x)}{\cancel{\Delta x}[x^2(x+\Delta x)^2]}=\frac{-(8x+4(\Delta x))}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

Tercer paso

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-[8x+4(0)]}{x^2(x+0)^2}=\frac{-(8x)}{x^2(x^2)}=\frac{-8x}{x^4}=-\frac{8}{x^3}$$

Cuarto paso

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{8}{x^3}$$

4 Encuentra la derivada de la función $u=\dfrac{5}{4+v^2}$.

$$\text{Si}\qquad u=\frac{5}{4+v^2}$$

$$u+\Delta u=\frac{5}{4+(v+\Delta v)^2}$$

Primer paso

$$\cancel{u}+\Delta u=\frac{5}{4+(v+\Delta v)^2}$$

$$-\cancel{u}=-\frac{5}{4+v^2}$$

$$\Delta u=\frac{5}{4+(v+\Delta v)^2}-\frac{5}{4+v^2}$$

Segundo paso

$$\Delta u=\frac{5(4+v^2)-5[4+(v+\Delta v)^2]}{(4+v^2)[4+(v+\Delta v)^2]}=\frac{20+5v^2-5[4+v^2+2v\Delta v+(\Delta v)^2]}{(4+v^2)[4+(v+\Delta v)^2]}$$

$$\Delta u=\frac{\cancel{20}+\cancel{5v^2}-\cancel{20}-\cancel{5v^2}-10v\Delta v^2-5(\Delta v)^2}{(4+v^2)[4+(v+\Delta v)^2]}=\frac{-\Delta v(10v+5\Delta v)}{(4+v^2)[4+(v+\Delta v)^2]}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta v}=\frac{-\cancel{\Delta v}(10v+5(\Delta v))}{\Delta v(4+v^2)[4+(v+\Delta v)^2]}=\frac{(10v+5\Delta v)}{(4+v^2)[4+(v+\Delta v)^2]}$$

Tercer paso

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta v}=\frac{-(10v+5(0))}{(4+v^2)[4+(v+0)^2]}=\frac{-10v}{(4+v^2)(4+v^2)}=-\frac{10v}{(4+v^2)^2}$$

Cuarto paso

$$\therefore\ \frac{du}{dv}=-\frac{10v}{(4+v^2)2}$$

5 Encuentra la derivada de la función $y=\dfrac{x+2}{x}$.

$$\text{Si } y=\frac{x+2}{x}$$

$$y+\Delta y=\frac{(x+\Delta x)+2}{(x+\Delta x)} \qquad \Big\} \text{ Primer paso}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cancel{y}+\Delta y&=\frac{(x+\Delta x)+2}{(x+\Delta x)}\\
-\cancel{y}&=-\frac{x+2}{x}\\
\hline
\Delta y&=\frac{(x+\Delta x)+2}{(x+\Delta x)}-\frac{x+2}{x}
\end{aligned}\right\} \text{ Segundo paso}$$

$$\Delta y=\frac{x[(x+\Delta x)+2]-(x+\Delta x)(x+2)}{x(x+\Delta x)}=\frac{\cancel{x^2}+x\cancel{\Delta x}+\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-x\cancel{\Delta x}-2\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}[x(x+\Delta x)]}=-\frac{2}{x(x+\Delta x)} \qquad \Big\} \text{ Tercer paso}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2}{x(x+0)}=-\frac{2}{x^2} \qquad \Big\} \text{ Cuarto paso}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^2}$$

6 Encuentra la derivada de la función $y=(a-bx)^3$.

$$\text{Si} \qquad y=(a-bx)^3=a^3-3a^2bx+3ab^2x^2-b^3x^3$$

$$y+\Delta y=a^3-3a^2b(x+\Delta x)+3ab^2(x+\Delta x)^2-b^3(x+\Delta x)^3 \qquad \}\ \text{Primer paso}$$

$$y+\Delta y=a^3-3a^2bx-3a^2b\Delta x+3ab^2[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]-b^3[x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]$$

$$\left.\begin{aligned}
\cancel{y}+\Delta y=\ &\cancel{a^3}-\cancel{3a^2bx}-3a^2b\Delta x+\cancel{3ab^2x^2}+6ab^2x\Delta x+3ab^2(\Delta x)^2-\cancel{b^3x^3}-3b^3x^2\Delta x\\
&-3b^3x(\Delta x)^2-b^3(\Delta x)^3\\
-\cancel{x}=\ &-\cancel{a^3}+\cancel{3a^2bx}-\cancel{3ab^2x^2}+\cancel{b^3x^3}\\
\hline
\Delta y=\ &-3a^2b\Delta x+6ab^2x\Delta x+3ab^2(\Delta x)^2-3b^3x^2\Delta x-3b^3x(\Delta x)^2-b^3(\Delta x)^3
\end{aligned}\right\} \text{ Segundo paso}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}[-3a^2b+6ab^2x+3ab^2\Delta x-3b^3x^2-3b^3x\Delta x-b^3(\Delta x)^2]}{\cancel{\Delta x}} \qquad \Big\} \text{ Tercer paso}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-3a^2b+6ab^2x+3ab^2(0)-3bx^2-3b^3x(0)-b^3(0)^2 \qquad \Big\} \text{ Cuarto paso}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-3a^2b+6ab^2x-3b^3x^2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-3a^2b+6ab^2x-3b^3x^2$$

7 Encuentra la derivada de la función $y=\sqrt{5x}$.

$$\text{Si} \quad y=\sqrt{5x}$$

$$y+\Delta y=\sqrt{5(x+\Delta x)} \quad \Big\}\ \text{Primer paso}$$

$$\begin{aligned} \cancel{y}+\Delta y&=\sqrt{5(x+\Delta x)}\\ -\cancel{y}\qquad &=-\sqrt{5x}\\ \hline \Delta y&=\sqrt{5(x+\Delta x)}-\sqrt{5x} \end{aligned} \quad \text{Segundo paso}$$

$$\Delta y=\left(\frac{\sqrt{5(x+\Delta x)}-\sqrt{5x}}{1}\right)\left(\frac{\sqrt{5(x+\Delta x)}+\sqrt{5x}}{\sqrt{5(x+\Delta x)}+\sqrt{5x}}\right) \quad \text{Proceso de racionalización}$$

$$\Delta y=\frac{5(x+\Delta x)-5x}{\sqrt{5(x+\Delta x)}+\sqrt{5x}}=\frac{\cancel{5x}+5\Delta x-\cancel{5x}}{\sqrt{5(x+\Delta x)}+\sqrt{5x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{5(x+\Delta x)}+\sqrt{5x})} \quad \text{Tercer paso}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5}{\sqrt{5(x+0)}+\sqrt{5x}}=\frac{5}{2\sqrt{5x}} \quad \text{Cuarto paso}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

8 Encuentra la derivada de la función $s=\sqrt{1-t^2}$.

$$\text{Si} \quad s=\sqrt{1-t^2}$$

$$s+\Delta s=\sqrt{1-(t+\Delta t)^2} \quad \Big\}\ \text{Primer paso}$$

$$\begin{aligned} \cancel{s}+\Delta s&=\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}\\ -\cancel{s}\qquad &=-\sqrt{1-t^2}\\ \hline \Delta s&=\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}-\sqrt{1-t^2} \end{aligned} \quad \text{Segundo paso}$$

$$\Delta s=\left(\frac{\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}-\sqrt{1-t^2}}{1}\right)\left(\frac{\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}+\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}+\sqrt{1-t^2}}\right) \quad \text{Proceso de racionalización}$$

$$\Delta s=\frac{1-(t+\Delta t)^2-(1-t^2)}{\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}+\sqrt{1-t^2}}=\frac{\cancel{1}-\cancel{t^2}-2t\Delta t-(\Delta t)^2\cancel{-1}+\cancel{t^2}}{\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}+\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\cancel{\Delta t}\,(-2t-\Delta t)}{\cancel{\Delta t}\left(\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}+\sqrt{1-t^2}\right)}=\frac{-2t-\Delta t}{\sqrt{1-(t+\Delta t)^2}+\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{Tercer paso}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{-2t-0}{\sqrt{1-(t+0)^2}+\sqrt{1-t^2}}=\frac{-2\cancel{t}}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-t^2}}=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{Cuarto paso}$$

$$\therefore\ \frac{ds}{dt}=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

9 ●●•Encuentra la derivada de la función $y=\dfrac{1}{\sqrt{ax}}$.

Si $\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{ax}}$

$$y+\Delta y=\frac{1}{\sqrt{a(x+\Delta x)}} \qquad \text{Primer paso}$$

$$\cancel{y}+\Delta y=\frac{1}{a(x+\Delta x)}$$

$$-\cancel{y}\qquad=-\frac{1}{\sqrt{ax}} \qquad \text{Segundo paso}$$

$$\Delta y=\frac{1}{a(x+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{ax}}$$

$$\Delta y=\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a(x+\Delta x)}}{\sqrt{ax}\sqrt{a(x+\Delta x)}}=\left(\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a(x+\Delta x)}}{\sqrt{ax}\sqrt{a(x+\Delta x)}}\right)\left(\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{a(x+\Delta x)}}{\sqrt{ax}+\sqrt{a(x+\Delta x)}}\right) \qquad \text{Proceso de racionalización}$$

$$\Delta y=\frac{ax-a(x+\Delta x)}{ax\sqrt{a(x+\Delta x)}+\sqrt{axa(x+\Delta x)}}=\frac{\cancel{ax}-\cancel{ax}-\cancel{a}\,\Delta x)}{\cancel{a}\left[x\sqrt{a(x+\Delta x)}+\sqrt{ax(x+Dx)}\right]}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\cancel{\Delta x}\left[x\sqrt{a(x+\Delta x)}+\sqrt{ax(x+\Delta x)}\right]}=\frac{1}{x\sqrt{a(x+\Delta x)}+\sqrt{ax(x+\Delta x)}} \qquad \text{Tercer paso}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x\sqrt{a(x+0)}+\sqrt{ax(x+0)}}=-\frac{1}{2x\sqrt{ax}} \qquad \text{Cuarto paso}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2x\sqrt{ax}}$$

10 ●●·Encuentra la derivada de la función $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Si $\quad y = x^{\frac{1}{3}}$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} \qquad \Big\}\ \text{Primer paso}$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{y} + \Delta y &= (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} \\ -\cancel{y} \qquad &= -x^{\frac{1}{3}} \\ \hline \Delta y &= (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\}\ \text{Segundo paso}$$

$$\Delta y = \left[\frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{1}\right]\left[\frac{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\right] \qquad \Big\}\ \text{Proceso de racionalización}$$

$$\Delta y = \frac{(x+\Delta x) + \cancel{x^{\frac{1}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}} + \cancel{x^{\frac{2}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}} = \cancel{x^{\frac{1}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}} - \cancel{x^{\frac{2}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}} - x}{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta x} - \cancel{x}}{\cancel{\Delta x}\left[(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right]} = \frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \qquad \Big\}\ \text{Tercer paso}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{(x+0)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+0)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \qquad \Big\}\ \text{Cuarto paso}$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

EJERCICIO 10

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Aplicando la regla general para la derivación, determina la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = 8x - 5$
2. $y = a + bx$
3. $y = 2x^2$
4. $y = x^2 - 3x$

5. $y = ax^3$
6. $y = 2x - 7x^3$
7. $y = 3x^2 + 5x - 1$
8. $s = 2t^3 + 4t^2 - 3t$
9. $u = mv^4$
10. $S = 6 - 3t + t^2$
11. $y = \dfrac{a}{x+a}$
12. $y = \dfrac{x^2+4}{2}$
13. $y = \dfrac{x+1}{x}$
14. $y = \dfrac{1-2x}{2}$
15. $y = \dfrac{2x+5}{1+x}$
16. $y = \dfrac{x}{x^3+1}$
17. $y = \dfrac{x^2}{a+bx^2}$
18. $u = \dfrac{1}{v^2+9}$
19. $y = (m + nx)^2$
20. $y = x(2 - x)$
21. $y = (5 - x)(2 - 3x)$
22. $s = (1 + x)^3$
23. $y = \dfrac{a+bx^2}{x}$
24. $y = \dfrac{4-x^2}{x^2}$
25. $y = \sqrt{x-5}$
26. $y = \sqrt{1+3x^2}$
27. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
28. $y = \sqrt{2+5x}$
29. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
30. $y = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
31. $y = \dfrac{a}{x^3}$
32. $y = (1 + 2x)^3$
33. $y = \dfrac{1}{\sqrt{5x}}$
34. $y = \sqrt[3]{ax}$
35. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3+x^2}}$
36. $y = \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$
37. $y = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}$
38. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
39. $y = \dfrac{2-x}{x-2}$
40. $y = 2x(a^2 - x^2)$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Reglas o fórmulas de derivación para funciones algebraicas

La regla general para derivación (regla de los cuatro pasos) es fundamental, puesto que se calcula directamente de la definición de derivada como límite. El procedimiento para aplicar esta regla es laborioso y tedioso, por consiguiente, se han deducido de la regla general formas especiales que simplifican la derivación, las cuales llamaremos **fórmulas fundamentales de derivación**.

Fórmulas fundamentales de derivación

1. La derivada de una constante es cero.

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

Demostración: Si $y = c$; por la definición de límite, tenemos que:

$$\frac{d(c)}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\therefore \ \frac{d(c)}{dx} = 0$$

2. La derivada de una variable con respecto a sí misma es la unidad.

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

Demostración: Si $y = x$; por la regla general, tenemos que:

$$y + \Delta y = x + \Delta x$$

$$\cancel{y} + \Delta y = x + \Delta x$$

$$\underline{-\cancel{y} \qquad = -x \qquad}$$

$$\Delta y = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 1 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$\therefore \ \frac{d(x)}{dx} = 1$$

3. La derivada de la suma algebraica de un número finito n de funciones, es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Demostración: Si $y = u + v - w$; por la regla general, tenemos que:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)$$

$$\cancel{y} + \Delta y = \cancel{u} + \Delta u + \cancel{v} + \Delta v - \cancel{w} - \Delta w$$

$$\underline{-\cancel{y} \qquad = -\cancel{u} - \cancel{v} + \cancel{w} \qquad}$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Al aplicar las propiedades de los límites, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$$

4. La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$$

Demostración: Si $y=cv$; por la regla general, tenemos que:

$$y+\Delta y=c(v+\Delta v)$$
$$\cancel{y}+\Delta y=\cancel{cv}+c\Delta v$$
$$-\cancel{y}\qquad =-\cancel{cv}$$
$$\Delta y=c\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{c\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Al aplicar las propiedades de los límites, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=c\frac{dv}{dx}\qquad\qquad \therefore\quad \frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$$

5. La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera función.

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

Demostración: Si $y=uv$; por la regla general, tenemos que:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(u+\Delta v)$$
$$\cancel{y}+\Delta y=\cancel{uv}+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$$
$$-\cancel{y}\qquad =-\cancel{uv}$$
$$\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\Delta v}{\Delta x}+\frac{v\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{Du}{\Delta v}+au\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

El límite del producto $\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$ es cero, de tal forma que al evaluar los demás límites, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dy}{dx}+v\frac{da}{dx}$$

6. La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

6*a*. Cuando $v=x$, la fórmula anterior se transforma en: $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

Demostración: Si $y=x^n$; por la regla general, tenemos que:

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n \quad (n \text{ es un número entero positivo})$$

$$\cancel{y}+\Delta y=\cancel{x^n}+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2+...+(\Delta x)^n$$

$$-\cancel{y} \qquad =-\cancel{xn}$$

$$\Delta y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2+...+(\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)+...+(\Delta x)^{n-1}\right]}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(0)+...+(0)^{n-1}=nx^{n-1}$$

Al aplicar las propiedades de los límites, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

7. La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Demostración: Si $y = \frac{u}{v}$; por la regla general, tenemos que:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\cancel{y} + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$-\cancel{y} \qquad = -\frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{\cancel{vu} + v\Delta u - \cancel{uv} - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x}}{\frac{\cancel{\Delta x} v(v + \Delta v)}{\cancel{\Delta x}}} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} v(v + \Delta v)}$$

Al aplicar las propiedades de los límites, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

7*a*. La derivada del cociente de una función dividida entre una constante es igual a la derivada de la función dividida entre la constante.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c} = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{du}{dx}$$

Demostración: Si $y = \frac{u}{c}$; por la regla general, tenemos que:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{c}$$

$$\cancel{y} + \Delta y = \cancel{\frac{u}{c}} + \frac{\Delta u}{c}$$

$$-\cancel{y} \qquad = -\cancel{\frac{u}{c}}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta u}{c}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{c\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\Delta u}{\Delta x}=\left(\frac{1}{c}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$ Al aplicar las propiedades de los límites, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{c}\right)\frac{du}{dx} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\left(\frac{1}{c}\right)\frac{du}{dx}$$

7*b*. La derivada del cociente de una constante dividida entre una función es igual a menos el producto de la constante dividida entre la función al cuadrado, todo por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=-\left(\frac{c}{u^2}\right)\frac{du}{dx}$$

Demostración: Si $y=\dfrac{c}{u}$; por la regla general, tenemos que:

$$y+\Delta y=\frac{c}{u+\Delta u}$$

$$\cancel{y}+\Delta y=\frac{c}{u+\Delta u}$$

$$-\cancel{y} \qquad =-\frac{c}{u}$$

$$\Delta y=\frac{c}{u+\Delta u}-\frac{c}{u}$$

$$\Delta y=\frac{cu-c(u+\Delta u)}{u(u+\Delta u)}=\frac{\cancel{cu}-\cancel{cu}-c\Delta u}{u(u+\Delta u)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-cu}{u(u+\Delta u)}}{\Delta x}=\frac{-c\Delta u}{\Delta x u(u+\Delta u)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-c\Delta u}{\Delta x}}{\frac{\Delta x u(u+\Delta u)}{\Delta x}}=\frac{-c\frac{\Delta u}{\Delta x}}{u(u+\Delta u)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0}u(u+\Delta u)}$$ Al aplicar las propiedades de los límites, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{c}{u^2}\right)\frac{du}{dx} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=-\left(\frac{c}{u^2}\right)\frac{du}{dx}$$

8. La derivada de la raíz enésima de una función es igual al cociente de la derivada de la función dividida entre el producto del índice de la raíz enésima por la función elevada al cociente del índice disminuido en una unidad y dividido entre el mismo índice.

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{v}) = \frac{\frac{dv}{dx}}{nv^{\frac{n-1}{n}}}$$

Demostración: Si $y = \sqrt[n]{v} = v^{\frac{1}{n}}$; por la regla general, tenemos que:

$$y + \Delta y = (v + \Delta v)^{\frac{1}{n}}$$

$$\cancel{y} + \Delta y = \cancel{v^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1}(\Delta v) + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)v^{\frac{1}{n}-2}}{2}(\Delta v)^2 + \ldots + (\Delta v)^{\frac{1}{n}}$$

$$\cancel{-y} \qquad = -\cancel{v^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Delta y = \frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1}(\Delta v) + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)v^{\frac{1}{n}-2}}{2}(\Delta v)^2 + \ldots + (\Delta v)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v\left[\frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)v^{\frac{1}{n}-2}}{2}(\Delta v) + \ldots + (\Delta v)^{\frac{1}{n}-1}\right]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v\left[\frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)v^{\frac{1}{n}-2}}{2}(\Delta v) + \ldots + (\Delta v)^{\frac{1}{n}-1}\right]}{\frac{\Delta x}{\frac{\cancel{\Delta x}}{\Delta x}}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\left[\frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)v^{\frac{1}{n}-2}}{2}(\Delta v) + \ldots + (\Delta v)^{\frac{1}{n}-1}\right] \quad \Bigg\} \text{ Al aplicar las propiedades de los límites, resulta:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\frac{dv}{dx}}{nv^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{dv}{dx}}{nv^{\frac{n-1}{n}}} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}(\sqrt[n]{v}) = \frac{\frac{dv}{dx}}{nv^{\frac{n-1}{n}}}$$

Aplicando las fórmulas fundamentales, calcular la derivada de diversas funciones algebraicas

En los siguientes ejemplos se presentan diferentes modelos matemáticos, los cuales se desarrollan paso a paso con el fin de que el estudiante tenga una mayor comprensión y entendimiento del proceso; también se recomienda el uso y manejo de formularios, mientras se logra la **memorización** de las mismas. Por último, se indica que en la mayor parte de los problemas de los ejemplos se hace uso de las operaciones algebraicas fundamentales, productos notables, leyes de los exponentes y radicales en forma explícita con el propósito de que el estudiante adquiera habilidad y destreza en el manejo de dichos conocimientos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = x^3 + 7$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(7)}{dx}$$
$$y' = 3x^{3-1} + 0$$
$$\therefore \quad y' = 3x^2$$

2. $y = 2x^2 + 4x$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(4x)$$
$$y' = \frac{2d}{dx}(x^2) + \frac{4d(x)}{dx}$$
$$y' = 2(2x^{2-1}) + 4(x^{1-1})$$
$$\therefore \quad y' = 4x + 4 = 4(x+1)$$

3. $y = (3 - x^2)^7$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left[(3-x^2)^7\right] = 7(3-x^2)^{7-1}\frac{d}{dx}(3-x^2)$$
$$y' = 7(3-x^2)^6\left[\frac{d}{dx}(3) - \frac{d}{dx}(x^2)\right]$$
$$y' = 7(3-x^2)^6(0 - 2x^{2-1}) = 7(3-x^2)^6(-2x)$$
$$\therefore \quad y' = -14x(3-x^2)^6$$

4. $y = \sqrt{x^2 - a^2} = (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$ } Pasando de la forma radical a la forma exponencial.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left[(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x^2-a^2)$$
$$y' = \frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(a^2)\right]$$
$$y' = \frac{1}{(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}(2x^{2-1} - 0) = \frac{1}{2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}(2x)$$
$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

* Este problema se puede resolver directamente por la fórmula número 8.

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\frac{\frac{d}{dx}(x^2-a^2)}{2(x^2-a^2)^{\frac{2-1}{2}}} = \frac{\left(\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(a^2)\right)}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$y' = \frac{(2x^{2-1} - 0)}{2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

5. $y = 3x^2\sqrt{2x-1}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(3x^2\sqrt{2x-1}\right) = 3x^2\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-1}\right) + \sqrt{2x-1}\frac{d}{dx}(3x^2)$$

$$y' = 3x^2\left[\frac{\frac{d}{dx}(2x-1)}{2(2x-1)^{\frac{2-1}{2}}}\right] + \sqrt{2x-1}\left[3\frac{d}{dx}(x^2)\right]$$

$$y' = 3x^2\left[\frac{\frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1)}{2(2x-1)^{\frac{1}{2}}}\right] + \sqrt{2x-1}\left[3(2x^{2-1})\right]$$

$$y' = 3x^2\left[\frac{2\frac{d}{dx}(x) - 0}{2\sqrt{2x-1}}\right] + \sqrt{2x-1}\left[3(2x)\right]$$

$$y' = 3x^2\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x-1}}\right) + 6x\sqrt{2x-1}$$

$$y' = \frac{3x^2}{\sqrt{2x-1}} + 6x\sqrt{2x-1} = \frac{3x^2 + \left(\sqrt{2x-1}\right)\left(6x\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{2x-1}}$$

$$y' = \frac{3x^2 + 6x(2x-1)}{\sqrt{2x-1}} = \frac{3x^2 + 12x^2 - 6x}{\sqrt{2x-1}} = \frac{15x^2 - 6x}{\sqrt{2x-1}}$$

6. $y = \dfrac{4+x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sqrt{4-x^2}\,\frac{d}{dx}(4+x^2) - (4+x^2)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{4-x^2}\left[\frac{d}{dx}(4) + \frac{d}{dx}(x^2)\right] - (4+x^2)\left[\frac{\frac{d}{dx}(4-x^2)}{2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}{(4-x^2)}$$

$$y' = \frac{\sqrt{4-x^2}\,(0+2x^{2-1}) - (4+x^2)\left[\frac{\frac{d}{dx}(4) - \frac{d}{dx}(x^2)}{2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}{(4-x^2)}$$

$$y' = \frac{\sqrt{4-x^2}\,(2x) - (4+x^2)\left[\frac{0-2x^{2-1}}{2\sqrt{4-x^2}}\right]}{(4-x^2)}$$

$$y' = \frac{2x\sqrt{4-x^2} - (4+x^2)\left[\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}\right]}{(4-x^2)} = \frac{2x\sqrt{4-x^2} + \frac{x(4+x^2)}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)}$$

$$y' = \frac{\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)\left(2x\sqrt{4-x^2}\right) + x(4+x^2)}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)}$$

$$y' = \frac{\dfrac{2x(4-x^2)+x(4+x^2)}{\sqrt{4-x^2}}}{\dfrac{(4-x^2)}{1}}$$

Aplicando el método de multiplicar extremo por extremo y medio por medio (ley del sándwich)

$$y' = \frac{8x-2x^3+4x+x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{12x-x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

7. $y = \sqrt[3]{9-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{9-x^2}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(9-x^2)}{3(9-x^2)^{\frac{3-1}{3}}} = \frac{\frac{d}{dx}(9)-\frac{d}{dx}(x^2)}{3(9-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = \frac{(0-2x^{2-1})}{3(9-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(9-x^2)^2}} = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(9-x^2)^2}}$$

8. $y = \dfrac{2+ax^2}{2-ax^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{(2-ax^2)\frac{d}{dx}(2+ax^2)-(2+ax^2)\frac{d}{dx}(2-ax^2)}{(2-ax^2)^2}$$

$$y' = \frac{(2-ax^2)\left[\frac{d}{dx}(2)+\frac{d}{dx}(ax^2)\right]-(2+ax^2)\left[\frac{d}{dx}(2)-\frac{d}{dx}(ax^2)\right]}{(2-ax^2)^2}$$

$$y' = \frac{(2-ax^2)\left[0+a\frac{d}{dx}(x^2)\right]-(2+ax^2)\left[0-a\frac{d}{dx}(x^2)\right]}{(2-ax^2)^2}$$

$$y' = \frac{(2-ax^2)\left[a(2x^{2-1})\right]-(2+ax^2)\left[-a(2x^2-1)\right]}{(2-ax^2)^2}$$

$$y' = \frac{(2-ax^2)(2ax)-(2+ax^2)(-2ax)}{(2-ax^2)}$$

$$y' = \frac{4ax-\cancel{2a^2x^3}+4ax+\cancel{2a^2x^3}}{(2-ax^2)^2} = \frac{8ax}{(2-ax^2)^2}$$

9. $y = \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}} = \dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1+2x)^{\frac{1}{2}}-(1+2x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\left[(1-2x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$y' = \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(1+2x)\right]-(1+2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(1-2x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(1-2x)\right]}{(1-2x)}$$

$$y' = \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}(1)+\frac{d}{dx}(2x)\right)\right]-(1+2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1)-\frac{d}{dx}(2x)\right]}{(1-2x)}$$

$$y' = \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2(1+2x)^{\frac{1}{2}}}\left(0+2\frac{d}{dx}(x)\right)\right]-(1+2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2(1-2x)^{\frac{1}{2}}}\left(0-2\frac{d}{dx}(x)\right)\right]}{(1-2x)}$$

$$y' = \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\cancel{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}}}(\cancel{2})\right]-(1+2x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\cancel{2}(1-2x)^{\frac{1}{2}}}(\cancel{-2})\right]}{(1-2x)}$$

$$y' = \frac{\frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}}{(1-2x)} = \frac{\frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{\frac{1}{2}}+(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(1-2x)}{1}}$$

$$y' = \frac{(1-2x)+(1+2x)}{(1-2x)(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1\cancel{-2x}+1\cancel{+2x}}{(1-2x)\sqrt{(1+2x)(1-2x)}}$$

$$y' = \frac{2}{(1-2x)\sqrt{1-4x^2}}$$

10. $s = \sqrt{2t-\frac{1}{t^2}} = \sqrt{\frac{2t^3-1}{t^2}} = \frac{\sqrt{2t^3-1}}{t}$

$$\frac{ds}{dt} = s' = \frac{t\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2t^3-1}\right)-\sqrt{2t^3-1}\,\frac{d}{dt}(t)}{t^2} = \frac{t\frac{d}{dt}\frac{(2t^3-1)}{}2(2t^3-1)^{\frac{1-2}{2}}-\sqrt{2t^3-1}}{t^2}$$

$$s' = \frac{\frac{t\left[\frac{d}{dt}(2t^3)-\frac{d}{dt}(1)\right]}{2(2t^3-1)^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{2t^3-1}}{t^2} = \frac{\frac{t\left(2\frac{d}{dt}(t^3)-0\right)}{2(2t^3-1)^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{2t^3-1}}{t^2}$$

$$s' = \frac{t\left[\frac{\cancel{2}(3t^{3-1})}{\cancel{2}(2t^3-1)^{\frac{1}{2}}}\right]-\sqrt{2t^3-1}}{t^2} = \frac{\frac{t(3t^2)}{(2t^3-1)^{\frac{1}{2}}}}{t^2}-\frac{\sqrt{2t^3-1}}{1}$$

$$s' = \frac{\frac{3t^3-(2t^3-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2t^3-1}}{(2t^3-1)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{t^2}{1}} = \frac{3t^2-(2t^3-1)}{t^2(2t^3-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3t^3-2t^3+1}{t^2\sqrt{2t^3-1}}$$

$$s' = \frac{t^3+1}{t^2\sqrt{2t^3-1}}$$

11. $y=\sqrt{2x}+\dfrac{2}{\sqrt{2x}}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sqrt{2x}}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(2x)}{2(2x)^{\frac{2-1}{2}}}+\left[-\frac{2}{\left(\sqrt{2x}\right)^2}\cdot\frac{d\left(\sqrt{2x}\right)}{dx}\right]$$

$$y'=\frac{\cancel{2}\frac{d(x)}{dx}}{\cancel{2}(2x)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}\left[\frac{\frac{d}{dx}(2x)}{2(2x)^{\frac{2-1}{2}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{x}\left[\frac{\cancel{2}\frac{d}{dx}(x)}{\cancel{2}(2x)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{x\sqrt{2x}}=\frac{x(1)-1}{x\sqrt{2x}}=\frac{x-1}{x\sqrt{2x}}$$

12. $u=(v+a)^2\sqrt{v^2+a}$

$$\frac{du}{dv}=u'=(v+a)^2\frac{d}{dv}\left(\sqrt{v^2+a}\right)+\sqrt{v^2+a}\,\frac{d}{dv}[(v+a)^2]$$

$$u'=(v+a)^2\left[\frac{d(v^2+a)}{2(v^2+a)^{\frac{2-1}{2}}}\right]+\sqrt{v^2+a}\left[2(v+a)^{2-1}\frac{d}{dv}(v+a)\right]$$

$$u'=(v+a)^2\left[\frac{\frac{d}{dv}(v^2)+\frac{d}{dv}(a)}{2(v^2+a)^{\frac{1}{2}}}\right]+\sqrt{v^2+a}\left(2(v+a)\left[\frac{d}{dv}(v)+\frac{d}{dv}(a)\right]\right)$$

$$u'=(v+a)^2\left(\frac{2v^{2-1}+0}{2\sqrt{v^2+a}}\right)+\sqrt{v^2+a}\,[2(v+a)(1+0)]$$

$$u'=(v+a)^2\left(\frac{\cancel{2}v}{\cancel{2}\sqrt{v^2+a}}\right)+\sqrt{v^2+a}\,[2(v+a)]$$

$$u'=\frac{v(v+a)^2}{\sqrt{v^2+a}}+\frac{2(v+a)\sqrt{v^2+a}}{1}=\frac{v(v^2+2av+a^2)+\sqrt{v^2+a}\left[2(v+a)\sqrt{v^2+a}\right]}{\sqrt{v^2+a}}$$

$$u'=\frac{v^3+2av^2+a^2v+2(v+a)(v^2+a)}{\sqrt{v^2+a}}=\frac{v^3+2av^2+a^2v+2v^3+2av+2av^2+2a^2}{\sqrt{v^2+a}}$$

$$u'=\frac{3v^3+4av^2+a^2v+2av+2a^2}{\sqrt{v^2+a}}$$

13. $y=\sqrt{2mx}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2mx}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(2mx)}{2(2mx)^{\frac{2-1}{2}}}=\frac{\cancel{2}m\frac{d}{dx}(x)}{\cancel{2}(2mx)^{\frac{1}{2}}}=\frac{m}{\sqrt{2mx}}$$

Como $y=\sqrt{2mx}$, entonces, $y'=\dfrac{m}{y}$.

2 ●●•Determina el valor de la derivada para el valor dado de la variable.

1. $y=\dfrac{\sqrt{1+2x}}{2x+5}$, cuando $x=\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{(2x+5)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+2x}\right)-\sqrt{1+2x}\,\frac{d}{dx}(2x+5)}{(2x+5)^2}$$

$$y'=\frac{(2x+5)\dfrac{\frac{d}{dx}(1+2x)}{2(1+2x)^{\frac{2-1}{2}}}-\sqrt{1+2x}\left[\frac{d}{dx}(2x)+\frac{d}{dx}(5)\right]}{(2x+5)^2}$$

$$y'=\frac{(2x+5)\left[\dfrac{\frac{d}{dx}(1)+\frac{d}{dx}(2x)}{2(1+2x)^{\frac{1}{2}}}\right]-\sqrt{1+2x}\left(2\frac{d}{dx}(x)+0\right)}{(2x+5)^2}$$

$$y'=\frac{(2x+5)\left[\dfrac{0+2\frac{d}{dx}(x)}{2\sqrt{1+2x}}\right]-\sqrt{1+2x}(2)}{(2x+5)^2}=\frac{(2x+5)\left(\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}}\right)-2\sqrt{1+2x}}{(2x+5)^2}$$

$$y'=\frac{\dfrac{(2x+5)}{\sqrt{1+2x}}-\dfrac{2\sqrt{1+2x}}{1}}{(2x+5)^2}=\frac{\dfrac{(2x+5)-\sqrt{1+2x}\left(2\sqrt{1+2x}\right)}{\sqrt{1+2x}}}{\dfrac{(2x+5)^2}{1}}$$

$$y'=\frac{2x+5-2(1+2x)}{(2x+5)^2\sqrt{1+2x}}=\frac{2x+5-2-4x}{(2x+5)^2\sqrt{1+2x}}=\frac{3-2x}{(2x+5)^2\sqrt{1+2x}}$$

Cuando $x=\dfrac{1}{2}$, tenemos que:

$$y'=\frac{3-2\left(\frac{1}{2}\right)}{\left[2\left(\frac{1}{2}\right)+5\right]^2\sqrt{1+2x\left(\frac{1}{2}\right)}}=\frac{3-1}{(1+5)^2\sqrt{1+1}}=\frac{2}{36\sqrt{2}}=\frac{1}{18\sqrt{2}}$$

2. $y=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{4}$ cuando $x=2$.

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{8-x^2}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{\frac{d}{dx}(8-x^2)}{2(8-x^2)^{\frac{2-1}{2}}}\right]$$

$$y'=\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{\frac{d}{dx}(8)-\frac{d}{dx}(x^2)}{2(8-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]=\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{0-2x^{2-1}}{2\sqrt{8-x^2}}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}\right)=\frac{-x}{4\sqrt{8-x^2}}$$

Cuando $x = 2$, tenemos que:

$$y' = -\frac{2}{4\sqrt{8-(2)^2}} = -\frac{2}{4\sqrt{8-4}} = -\frac{2}{4(2)} = -\frac{1}{4}$$

3. $y = \dfrac{\sqrt{5x-1}}{4x+1}$ cuando $x = 2$.

$$y = \frac{(5x-1)^{\frac{1}{2}}}{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(5x-1)^{\frac{1}{2}} - (5x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(4x+1)^{\frac{1}{2}}}{\left[(4x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$y' = \frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(5x-1)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(5x-1)\right] - (5x-1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(4x+1)\right]}{(4x+1)}$$

$$y' = \frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(5x-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(1)\right)\right] - (5x-1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(1)\right)\right]}{(4x+1)}$$

$$y' = \frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2(5x-1)^{\frac{1}{2}}}\left(5\frac{d}{dx}(x) - 0\right)\right] - (5x-1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2(4x+1)^{\frac{1}{2}}}\left(4\frac{d}{dx}(x) + 0\right)\right]}{(4x+1)}$$

$$y' = \frac{\frac{5(4x+1)^{\frac{1}{2}}}{2(5x-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4(5x-1)^{\frac{1}{2}}}{2(4x+1)^{\frac{1}{2}}}}{(4x+1)} = \frac{\frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}}\left[5(4x+1)^{\frac{1}{2}}\right] - (5x-1)^{\frac{1}{2}}\left[4(5x-1)^{\frac{1}{2}}\right]}{2(5x-1)^{\frac{1}{2}}(4x+1)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(4x+1)}{1}}$$

$$y' = \frac{5(4x+1) - 4(5x-1)}{(4x+1)\left[2(5x-1)^{\frac{1}{2}}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\right]} = \frac{\cancel{20x} + 5 - \cancel{20x} + 4}{2(5x-1)^{\frac{1}{2}}(4x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{2\sqrt{(5x-1)(4x+1)^3}}$$

Cuando $x = 2$, tenemos que:

$$y' = \frac{9}{2\sqrt{[5(2)-1][4(2)+1]}} = \frac{9}{2\sqrt{(9)(729)}} = \frac{9}{2\sqrt{6561}} = \frac{9}{2(81)} = \frac{1}{18}$$

EJERCICIO 11

I. En equipo, encuentren la derivada de las siguientes funciones y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes	
Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. $y = 3x^3 + x^2 - 7x + 2$
2. $y = ax^3 - bx^2 + cx$
3. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5x^2}{\sqrt[5]{x^4}} + 8\sqrt[8]{x^5}$
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2ax}}$
5. $y = (x^2 + a^2)^5$
6. $y = \sqrt{3x^2 - 2}$
7. $y = (5x^2 + 1)\sqrt{3x^2 + 2}$
8. $y = \dfrac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $y = \left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x^2}\right)$
10. $y = \sqrt[3]{x^2} + b^{\frac{2}{3}}$
11. $y = \dfrac{\sqrt{2x}}{a} - \dfrac{a}{\sqrt{2x}}$
12. $y = \sqrt[3]{8 - 16x}$
13. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$
14. $y = \left(4 - \dfrac{2}{x}\right)^2$
15. $y = x^2\sqrt{bx + a}$
16. $y = \dfrac{a + x}{a - x}$
17. $y = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$
18. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$
19. $y = \sqrt{\dfrac{1 - ax}{1 + ax}}$
20. $y = \sqrt[3]{\dfrac{a + bx}{a - bx}}$
21. $y = \dfrac{\sqrt[3]{1 + 5x}}{\sqrt{1 + 2x}}$
22. $y = 2x^2\sqrt{2 + x}$
23. $y = (2x)\sqrt{5 - 2x}$
24. $y = (2x - 5)^2(x^2 + 1)$
25. $y = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$
26. $y = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$
27. $y = \dfrac{1}{x + 1}$
28. $y = x^2\sqrt{1 + x^3}$
29. $u = \dfrac{v^2 + a^2}{v^2 - a^2}$
30. $s = t^2 - 4t + 3$
31. $y = (3x + 2)^2 (x^2 - 1)$
32. $y = \dfrac{v^2}{\sqrt{4 - v^2}}$
33. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 3}$
34. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$

35. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$

36. $y = 2x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$

37. $y = \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

38. $y = \sqrt{x}(1-x)$

39. $y = \dfrac{1+x^2}{\sqrt{x}}$

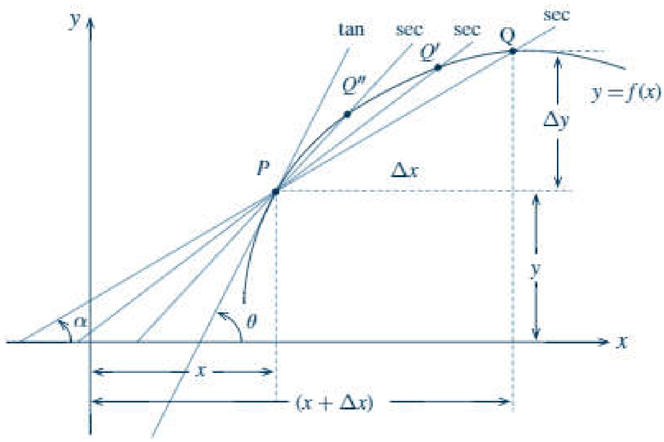
II. Determina el valor de la derivada para el valor dado de la variable.

1. $y = \sqrt[3]{2x} + \sqrt{2x}$, cuando $x = 2$
2. $y = \dfrac{\sqrt{4+x}}{x}$, cuando $x = 3$
3. $y = \sqrt{\dfrac{10-x^2}{x^2-5}}$, cuando $x = -3$
4. $y = (x^2 - 2x)^3$, cuando $x = 4$
5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{5+x^2}}$, cuando $x = 1$
6. $s = 5 - \dfrac{1}{2t^3}$, cuando $t = 2$
7. $u = 3v^{-2}$, cuando $v = 2$
8. $s = -\dfrac{t^4}{2} + 3t^3 - 2t$, cuando $t = -1$
9. $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$, cuando $x = 1$
10. $u = 3u\left(u^2 - \dfrac{2}{u}\right)$, cuando $u = 2$
11. $s = 3 - \dfrac{3t}{5t^2}$, cuando $t = \dfrac{3}{5}$
12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$, cuando $x = 4$
13. $y = x\sqrt{x}$, cuando $x = 4$
14. $y = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$, cuando $x = 2$
15. $u = \dfrac{v^2 + 4v + 1}{v + 4}$, cuando $v = -1$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Pendiente de la recta tangente a una función en un punto

Definición de tangente a una curva en un punto
Sea una recta secante que pase por los puntos $P(x,y)$ y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la curva $y = f(x)$; si el punto Q se aproxima indefinidamente a P, la secante se acerca a la posición de la recta tangente a la curva en el punto P.



De lo anterior, la tangente a una curva en un punto se define como el límite de las posiciones de una recta secante, cuando uno de los puntos de intersección se acerca indefinidamente al otro.

Interpretación geométrica de la derivada

Con base en la figura anterior se tiene la curva, que se representa por la función $y = f(x)$, el punto $P(x,y)$ de dicha curva; el ángulo θ que es la inclinación de la tangente en P; el ángulo α que es la inclinación de la secante que pasa por los puntos P y Q de la curva.

Por definición, tenemos que la pendiente de la secante está dada por:

$$\overline{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{sec}$$

La función tangente se define para α como la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente, es decir:

$$\tan \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{sec}$$

El punto $P(x,y)$ es fijo en la curva, el punto $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ es móvil. Así, cuando Q se acerca cada vez más a P, es decir, $\Delta x \to 0$ se tiene que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \alpha = \tan \theta$$

Lo anterior se define como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P, es decir,

$$m = \tan \theta$$

Por definición de derivada, resulta:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=m=\tan\theta$$

El valor de la derivada de una función en un punto $P(x,y)$ se representa geométricamente por la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

Este estudio sobre las tangentes condujo a Gottfried Wilhelm Leibniz al descubrimiento del cálculo diferencial.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la pendiente y la inclinación de la tangente para las siguientes curvas en el punto cuya abscisa se indica; verifica el resultado trazando la gráfica correspondiente.

1. Dado que $y=x^2-6x+3$, derivando se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}6x+\frac{d}{dx}(3)$$

$$y'=2x^{2-1}-6\frac{d}{dx}(x)+0$$

$$y'=2x-6$$

Como $x=2$, se tiene:

$$y'=m=2(2)-6$$

$$\therefore\quad m=-2\ \}\ \text{Pendiente}$$

$$m=\tan\theta$$

$$\theta=\arctan m$$

$$\theta=\arctan(-2)$$

$$\theta=-63^\circ\ 26'5''$$

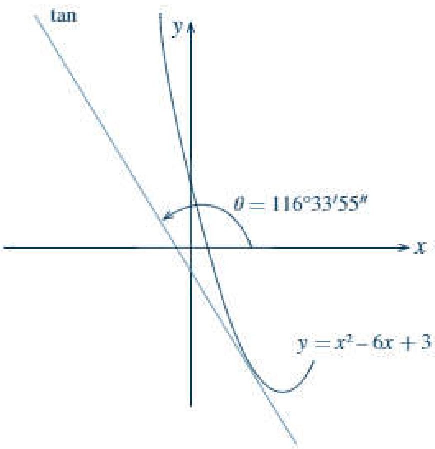
$$\theta=\begin{cases}179^\circ\ 59'60''\\ \underline{-63^\circ 26'5''}\end{cases}$$

$$\therefore\quad \theta=116^\circ 33'55''\ \}\ \text{Ángulo de inclinación}$$

Para graficar recuerda que es necesario elaborar una tabla para obtener los puntos que se ubicarán en el plano cartesiano.

$y=x^2-6x+3$

x	y
–3	30
–2	19
–1	10
0	3
1	–2
2	–5
3	–6
4	–5



2. Dado que $y=\dfrac{8}{x+2}$, derivando se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{8}{x+2}\right)=-\frac{8}{(x+2)^2}\frac{d}{dx}(x+2)=-\frac{8}{(x+2)^2}\left[\frac{d(x)}{dx}+\frac{d(2)}{dx}\right]$$

$$y'=-\frac{8}{(x+2)^2}$$

Como $x=4$, se tiene:

$$\left.y'=m=-\frac{8}{(4+2)^2}=-\frac{8}{36}=-0.222\quad\right\}\ \text{Pendiente}$$

$$m=\tan\theta$$

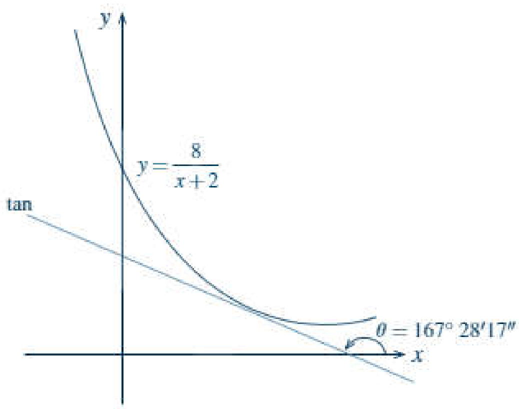
$$\theta=\arctan m$$

$$\theta=\arctan(-0.222)\qquad \theta=\begin{cases}179°\ 59'60''\\ -12°31'43''\end{cases}$$

$$\theta=-12°31'43''\qquad \therefore\quad \theta=167°28'17''$$

Se elabora una tabla y se realiza la gráfica respectiva de la función $y=\dfrac{8}{x+2}$.

x	y
−2	∞
−1	3
0	4
1	2.6
2	2
3	1.6
4	1.3
5	1.1
6	1



2 Determina la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto dado; construye la gráfica correspondiente.

1. $y=\sqrt{x}$; $P(9,3)$.

Derivando se tiene:

$$y'=\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{\frac{d(x)}{dx}}{2(x)^{\frac{2-1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En el punto $P(9,3)$ la pendiente de la tangente está dada por

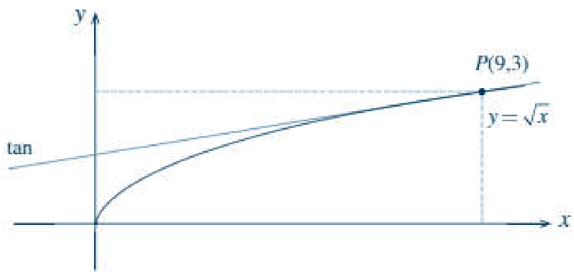
$$y'=m=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$$

La ecuación de la recta se determina por la siguiente fórmula:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-3=\frac{1}{6}(x-9)$$
$$6y-18=x-9$$
$$x-6y-9+18=0$$
$$\therefore\quad x-6y+9=0\ \Big\}\ \text{Ecuación de la tangente.}$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $y=\sqrt{x}$ se tiene:

x	y
0	0
1	1
2	1.4
3	1.7
4	2
5	2.2
6	2.4
7	2.6
8	2.8
9	3



2. $y = \frac{1}{x}$; $P\left(\frac{1}{4}, 4\right)$.

Derivando la función se tiene:

$$y' = -\frac{1}{x^2}\frac{d(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

La pendiente de la tangente en el punto $P\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ está dada por:

$$y' = m = -\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{16}} = -16$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

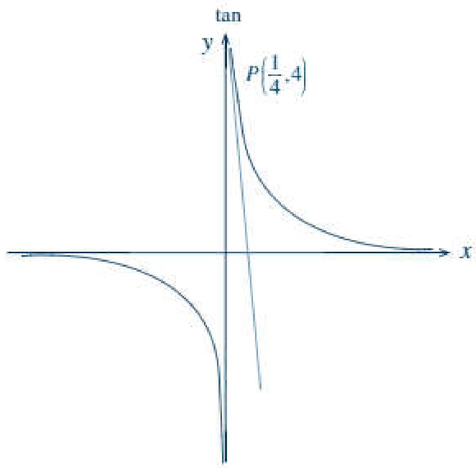
$$y - 4 = -16x + 4$$

$$16x + y - 4 - 4 = 0$$

$$\therefore \quad 16x + y - 8 = 0 \quad \Big\} \text{ Ecuación de la tangente.}$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $y = \frac{1}{x}$ se tiene.

x	y
−4	−0.25
−3	−0.3
−2	−0.5
−1	−1
0	∞
$\frac{1}{4}$	4
1	1
2	0.5
3	0.3
4	0.25



3 En las siguientes curvas, encuentra los puntos de tangencia, la ecuación de la recta tangente que sea paralela a las rectas dadas y construye su respectiva gráfica.

1. $y = x^3$; recta paralela $3x - y + 1 = 0$

$$y' = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2 \qquad \therefore \quad y' = m = 3x^2$$

Cuando dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales. Para encontrar el valor de la pendiente de una recta con la forma $Ax + By + C = 0$ se utiliza la siguiente fórmula:

$$m = -\frac{A}{B} \quad \left.\right\} \text{ Fórmula para determinar la pendiente de la ecuación de la recta en su forma general.}$$

Entonces, para $3x - y + 1 = 0$, se tiene:

$$m = -\frac{3}{-1} = 3$$

Al sustituir el valor de la pendiente en la derivada, se tiene que:

$$\begin{aligned} y' = m &= 3x^2 \quad \text{y} \quad \text{como } m = 3, \\ 3 &= 3x^2 \\ x^2 &= \frac{3}{3} \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Para determinar los puntos de tangencia, se sustituye el valor de x en la ecuación de la curva $y = x^3$, lo que resulta:

Para $x = 1$	Para $x = -1$
$y = (1)^3 = 1$	$y = (-1)^3 = -1$

Los puntos de tangencia son $P(1,1)$ y $P'(-1,-1)$.

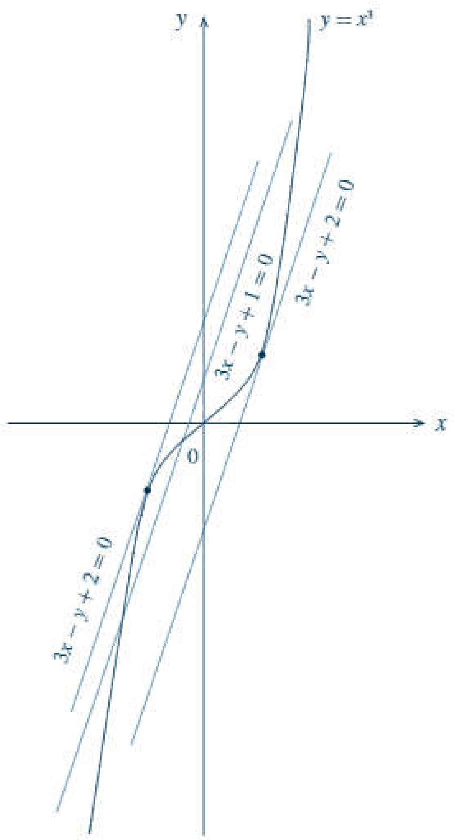
Con los puntos de tangencia y la pendiente de la ecuación de la recta paralela ($m = 3$), se puede determinar la ecuación de la recta tangente a la curva dada.

Para $x = 1$	Para $x = -1$
$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 1 = 3(x - 1)$	$y - (-1) = 3[x - (-1)]$
$y - 1 = 3x - 3$	$y + 1 = 3x + 3$
$3x - y - 3 + 1 = 0$	$3x - y + 3 - 1 = 0$
$\therefore \quad 3x - y - 2 = 0$	$\therefore \quad 3x - y + 2 = 0$

$$\therefore \quad 3x - y - 2 = 0 \left.\right\} \text{ Ecuación de las tangentes } \left\{\right. \therefore \quad 3x - y + 2 = 0$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $y = x^3$, se tiene:

x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	27
1	1
2	8
3	27



2. $y = \dfrac{\sqrt{72 - 9x^2}}{2}$; recta paralela $3x + 2y - 19 = 0$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{72-9x^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{72-9x^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\frac{d}{dx}(72-9x^2)}{2(72-9x^2)^{\frac{2-1}{2}}}$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left[\frac{d(72)}{dx} - \frac{d(9x^2)}{dx}\right]}{2(72-9x^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left[0 - 9\frac{d(x^2)}{dx}\right]}{2\sqrt{72-9x^2}} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{[(-9)(2x^{2-1})]}{2\sqrt{72-9x^2}}$$

$$y' = \frac{-18x}{4\sqrt{72-9x^2}} = -\frac{9x}{2\sqrt{72-9x^2}} \qquad \therefore \quad y' = m = -\frac{9x}{2\sqrt{72-9x^2}}$$

La pendiente de la recta paralela es:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$$

Se sustituye en la derivada de la función, lo que resulta:

$$-\frac{3}{2}=-\frac{9x}{2\sqrt{72-9x^2}} \quad \Bigg\} \text{ Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos que:}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\left(-\frac{9x}{2\sqrt{72-9x^2}}\right)^2$$

$$\frac{9}{4}=\frac{81x^2}{4(72-9x^2)}$$

$$36(72-9x^2)=324x^2$$

$$2592-324x^2=324x^2$$

$$324x^2+324x^2=2592$$

$$648x^2=2592$$

$$x^2=\frac{2592}{648}$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

Al sustituir el valor encontrado en la ecuación de la curva dada, resulta:

$$\text{Para } x=\pm 2$$

$$y=\frac{\sqrt{72-9(2)^2}}{2}$$

$$y=\frac{\sqrt{72-36}}{2}$$

$$y=\frac{6}{2}=+3$$

Por lo tanto, el punto de tangencia es:

$$P(2,3)$$

La ecuación de la recta tangente a la curva es:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$$

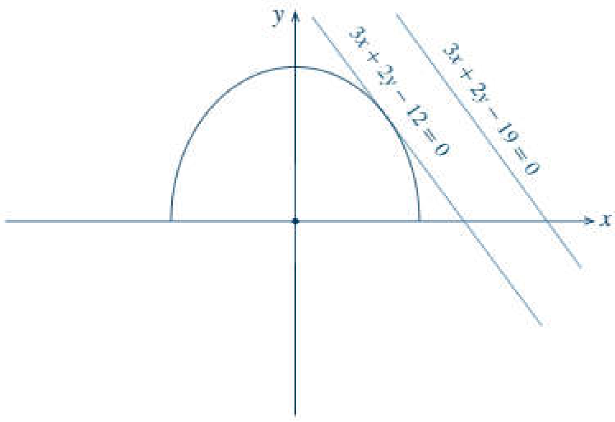
$$2y-6=-3x+6$$

$$3x+2y-6-6=0$$

$$3x+2y-12=0 \quad \} \text{ Ecuación de la tangente}$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $y = \dfrac{\sqrt{72 - 9x^2}}{2}$ se tiene:

x	y
−3	*i*
−2.5	1.9
−2	3.9
−1	4.2
0	4.2
1	3.9
2	3
2.5	1.9
3	*i*



4 En el siguiente problema encuentra:

a) Las coordenadas de los puntos de intersección del par de curvas dado.
b) La pendiente y el ángulo de inclinación de la tangente a cada curva.
c) El ángulo formado por las tangentes en cada punto de intersección.

1. $y = 1 - x^3$
   $y = x^3 - 1$

a) Al resolver el sistema dado, se tiene que:

$$(1)\ y = 1 - x^3 \qquad (2)\ y = x^3 - 1$$

$$x^3 - 1 = 1 - x^3$$
$$2x^3 = 2$$
$$x^3 = \frac{2}{2}$$
$$x^3 = 1$$
$$\therefore \quad x = 1$$

Al sustituir en cualquiera de las ecuaciones, resulta:

$$(1)\ y = 1 - (1)^3 \qquad y = 0$$

$$(2)\ y = (1)^3 - 1 \qquad y = 0$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección entre las curvas es $P(1,0)$.

b)

$$y = 1 - x^3 \quad \textbf{(1)} \qquad\qquad y = x^3 - 1 \quad \textbf{(2)}$$

$$y' = \frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(x^3) \qquad\qquad y' = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$y' = 0 - 3x^{3-1} \qquad\qquad y' = -3x^{3-1} - 0$$

$$y' = -3x^2 \qquad\qquad y' = -3x^2$$

$$y' = m_1 = -3x^2 \quad \textbf{(1)} \qquad\qquad y' = m_2 = -3x^2 \quad \textbf{(2)}$$

$$m_1 = -3(1)^2 \qquad\qquad m_2 = -3(1)^2$$

$$m_1 = -3 \quad \} \quad \text{Pendientes respectivas} \quad \{ \quad m_2 = 3$$

$$\theta = \arctan m \quad \textbf{(1)} \qquad\qquad \theta = \arctan m \quad \textbf{(2)}$$

$$\theta = \arctan(-3) \qquad\qquad \theta = \arctan(3)$$

$$\theta_1 = -71°\, 33'54'' \qquad\qquad \theta_2 = 71°33'54''$$

$$\theta_1 = \begin{cases} 179°\, 59'60'' \\ \underline{-71°33'54''} \end{cases}$$

$$\theta_1 = \quad 108°26'06'' \quad \} \quad \text{Ángulos de inclinación} \quad \{ \quad \theta_2 = \quad 71°33'54''$$

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \qquad\qquad y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$y - 0 = -3(x - 1) \qquad\qquad y - 0 = 3(x - 1)$$

$$y = -3x + 3 \qquad\qquad y = 3x - 3$$

$$3x + y - 3 = 0 \quad \} \quad \text{Ecuaciones de las tangentes} \quad \{ \quad 3x - y - 3 = 0$$

c) Si $m_1 = -3$ y $m_2 = 3$, se emplea la fórmula para determinar el ángulo θ entre dos rectas, se tiene:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Al sustituir, resulta:

$$\tan \theta = \frac{3-(-3)}{1+(-3)(3)} = \frac{3+3}{1-9} = \frac{6}{-8} = -0.75$$

$$\theta = \arctan\,(-0.75)$$

$$\theta = -36°52'11''$$

$$\theta = \begin{cases} 179°\, 59'11'' \\ \underline{-36°52'11''} \end{cases}$$

$$\theta = 143°07'49''$$

$\therefore$ El ángulo formado por las tangentes en el punto de intersección es $\theta = 143°07'49''$.

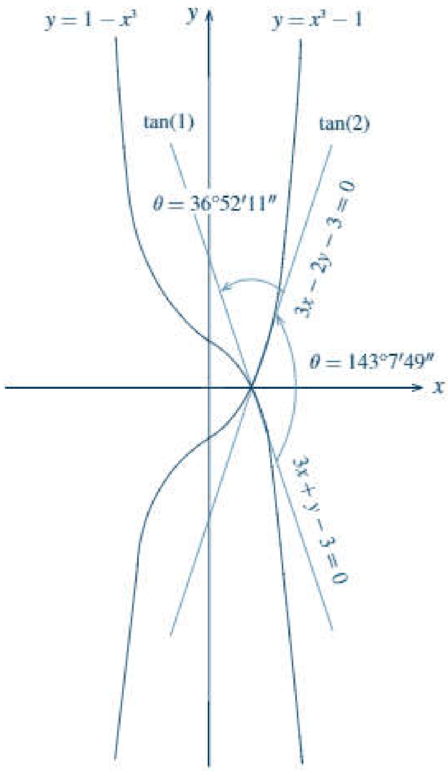
Para realizar las gráficas correspondientes, se tiene:

$y = 1 - x^3$

x	y
−3	28
−2	9
−1	2
0	1
1	0
2	−7
3	−26

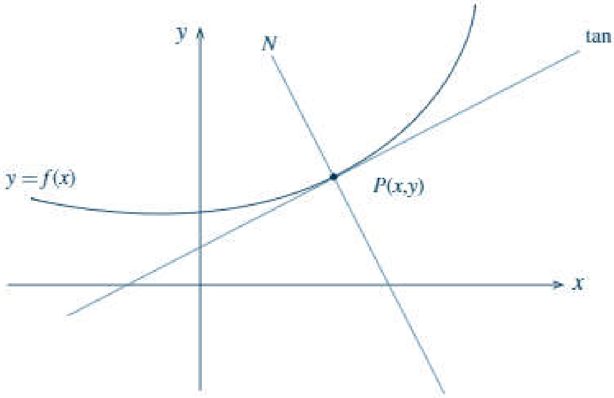
$y = x^3 - 1$

x	y
−3	−28
−2	−9
−1	−2
0	−1
1	0
2	7
3	26



Normal a una curva en un punto

Se denomina recta normal a una curva en un punto, a la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.



En la gráfica, N representa a la recta normal a la tangente en el punto $P(x,y)$ de la curva $y = f(x)$.

Ecuaciones de la tangente y normal a una curva en uno de sus puntos

Con base en la figura anterior se establece que la ecuación de la tangente se determina por la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$, como la normal es perpendicular a la tangente, sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, por lo que la ecuación de la recta normal es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra las ecuaciones de la tangente y normal a la curva $y = 4x^2$ en el punto $P(-1,4)$ y construye la gráfica correspondiente.

$$\left.\begin{aligned} &y = 4x^2 \\ &y' = \frac{d}{dx}(4x^2) = 4\frac{d}{dx}(x^2) = 4(2x^{2-1}) = 8x \end{aligned}\right\} \text{ Derivada de la curva.}$$

Se debe obtener la pendiente de la tangente en el punto dado para encontrar la ecuación de la recta, así:

$$y' = m = 8(-1) = -8 \quad \} \text{ Pendiente de la tangente.}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -8(x + 1)$$

$$y - 4 = -8x - 8$$

$$8x + y - 4 + 8 = 0$$

$$8x + y + 4 = 0 \quad \} \text{ Ecuación de la tangente.}$$

Ahora, se calcula la ecuación de la recta normal:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{-8}(x + 1)$$

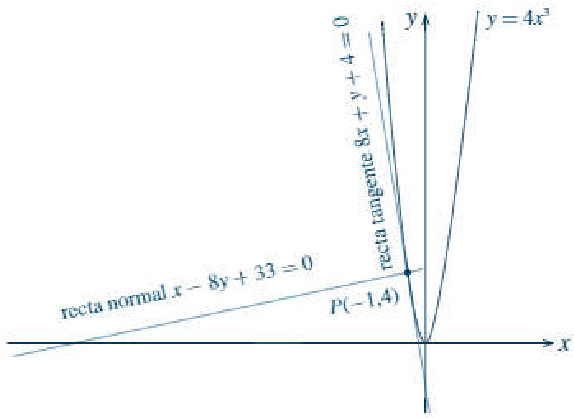
$$-8y + 32 = -x - 1$$

$$x - 8y + 32 + 1 = 0$$

$$x - 8y + 33 = 0 \quad \} \text{ Ecuación de la normal.}$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $y = 4x^2$ junto con la recta tangente y normal se tiene:

x	y
−2	16
−1	4
0	0
1	4
2	16



2 ●●•Encuentra las ecuaciones de la tangente y normal a la curva $y = 5x - x^2$ en el punto $P(2,6)$ y construye la gráfica correspondiente.

$$y = 5x - x^2$$

$$y' = \frac{d}{dx}(5x - x^2) = \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(x^2) = 5\frac{d}{dx}(x) - 2x^{2-1} = 5 - 2x \quad \Big\} \text{ Derivada de la curva.}$$

Dada la derivada, se calcula la pendiente de la tangente en el punto $P(2,6)$:

$$y' = m = 5 - 2(2) = 5 - 4 = 1 \quad \Big\} \text{ Pendiente de la tangente.}$$

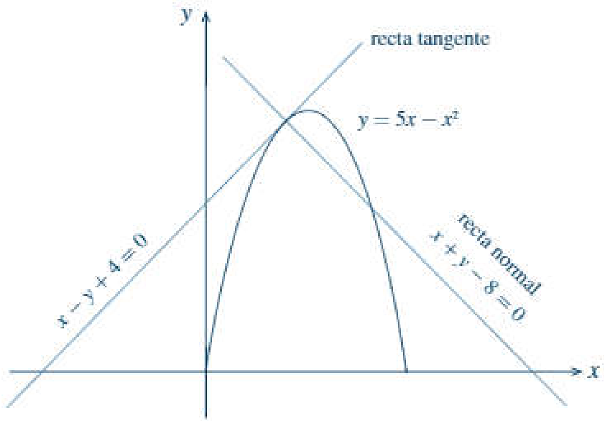
Ahora se obtienen las ecuaciones de la recta tangente y la normal, respectivamente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 6 &= 1(x - 2) \\ y - 6 &= x - 2 \\ x - y - 2 + 6 &= 0 \\ x - y + 4 &= 0 \quad \Big\} \text{ Ecuación de la tangente.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= -\frac{1}{m}(x - x_1) \\ y - 6 &= -\frac{1}{1}(x - 2) \\ y - 6 &= -x + 2 \\ x + y - 6 - 2 &= 0 \\ x + y - 8 &= 0 \quad \Big\} \text{ Ecuación de la normal.} \end{aligned}$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $y = 5x - x^2$ junto con la recta tangente y normal, se tiene:

x	y
0	0
1	4
2	6
3	6
4	4
5	0



EJERCICIO 12

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto cuya abscisa se indica y verifica el resultado al trazar la gráfica correspondiente.

1. $y = x^2 - 4x + 3$, cuando $x = 3$
2. $y = x^2 - 3$, cuando $x = 1$
3. $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 8$, cuando $x = -2$
4. $y = 5 - 8x + 2x^2$, cuando $x = 1$
5. $y = \frac{5}{x^2} - 2$, cuando $x = -2$
6. $y = \frac{x^3}{3} + x + 1$, cuando $x = -1$
7. $y = \frac{2+3x}{3+2x}$, cuando $x = 2$
8. $y = x^3 - 3x^2 + 1$, cuando $x = 1$
9. $y = x^2 - 1$, cuando $x = -3$
10. $y = \frac{2x+1}{3-x}$, cuando $x = 2$
11. $y = \frac{x^2}{a}$, cuando $x = a$
12. $y = 6x - x^2$, cuando $x = 5$
13. $y = x\sqrt{5+x^2}$, cuando $x = 2$
14. $y = \frac{\sqrt[3]{6x-4}}{x}$, cuando $x = 2$
15. $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, cuando $x = 3$

II. Determina la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto dado y construye la gráfica correspondiente. Socializa el proceso de solución.

1. $y = 3x - x^3$; $P(2,-2)$
2. $y = x^3 + 2x^2 - x$; $P(-1,2)$
3. $y = 3x^2 + 4x - 2$; $P(1,5)$
4. $y = 9x^2$; $P(1,9)$
5. $y = 3 + 3x - x^3$; $P(-1,1)$
6. $y = x^3 + x$; $P(-2,-10)$
7. $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$; $P(2,0.5)$
8. $y = \frac{4}{x-1}$; $P(2,4)$
9. $y = x^2 + 2x + 1$; $P(-3,4)$
10. $y = \sqrt{x+1}$; $P(3,-2)$

11. $y=\sqrt{3x^2-2}$; $P(3,5)$

12. $y=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}$; $P(1,0)$

13. $y=\sqrt{x^2+2x+1}$; $P(3,4)$

14. $y=\frac{1}{(x+2)^2}$; $P\left(2,\frac{1}{16}\right)$

15. $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; $P(1,\sqrt{8})$

III. En las siguientes curvas encuentra los puntos de tangencia, la ecuación de la recta tangente que sea paralela a las rectas dadas y construye la gráfica correspondiente.

1. $y=x^3+x$; recta paralela $4x-y=0$
2. $y=x^3+5$; recta paralela $12x-y-17=0$
3. $y=\sqrt{5-5x^2}$; recta paralela $2x-y+3=0$
4. $y=\sqrt{18-9x^2}$; recta paralela $3x-y+6=0$
5. $y=3-x^2$; recta paralela $4x-y-14=0$
6. $y=\sqrt{\frac{x^3}{2}}$; recta paralela $3x-2y-24=0$
7. $y=x^2+2x-3$; recta paralela $4x+y-23=0$
8. $y=x^4-3x^2+2$; recta paralela $2x+y+4=0$
9. $y=x^3+x$; recta paralela $4x-y-17=0$
10. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; recta paralela $x+2y-6=0$

IV. En equipo, resuelvan los siguientes problemas y determinen:

a) Las coordenadas de los puntos de intersección del par de curvas dado.

b) La pendiente y el ángulo de inclinación de la tangente a cada curva.

c) El ángulo formado por las tangentes en cada punto de intersección.

1. $y=x^2$
   $y=x+2$
2. $y=x^3-3x$
   $y=-2x$
3. $y=x^2-1$
   $y=1-x^2$
4. $y=\frac{6x-9}{4}$
   $y=\frac{x^2}{4}$
5. $y=x^2$
   $y=6x-x^2-5$
6. $y=\sqrt{x}$
   $y=x^2$

7. $y = x^2 + 3$
   $y = 2x^2 - 1$

8. $y = \sqrt{4x - x^2}$
   $y = \sqrt{8 - x^2}$

9. $y = x^2 - 2$
   $y = 10 - 2x^2$

10. $y = -x^2$
    $y = 2 - x$

V. Encuentra las ecuaciones de la tangente y normal a las curvas dadas en el punto específico y construye la gráfica correspondiente.

1. $y = x^2 + 1;\ P(2,5)$
2. $y = x^2 + 2x + 1;\ P(-3,4)$
3. $y = x^3;\ P(2,8)$
4. $y = x^3 - 3x;\ P(2,2)$
5. $y = \dfrac{2x+1}{3-x};\ P(1,1.5)$
6. $y = x^2;\ P(1,-1)$
7. $y = 4x - x^2;\ P(2,4)$
8. $y = \sqrt{x^2 - 7};\ P(4,-3)$
9. $y = 4x^2;\ P(-1,4)$
10. $y = x^3 - 2x^2 + 4;\ P(2,4)$

VI. Resuelve los siguientes ejercicios y en plenaria discute tus resultados.

1. Encuentra la ecuación de la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt{x-3}$, si se sabe que la recta normal es paralela a la $6x + 3y - 4 = 0$.
2. Encuentra la ecuación de la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt{4x-3}$, si se sabe que la recta tangente es perpendicular a la recta $2x + 4y - 22 = 0$.
3. Encuentra la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = 3x^2 - 8$ en el punto $A(2,6)$.
4. Encuentra la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ y que es perpendicular a la recta $x + 3y - 2 = 0$.
5. Encuentra las ecuaciones de la tangente y normal a la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ en el punto $A(0,0)$.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Regla de la cadena para derivar funciones compuestas

Del enunciado **regla de la cadena**, la palabra **cadena** se refiere a las funciones que se componen de otras funciones, es decir, como si fueran los eslabones de una cadena.

Ejemplo

Si $y = f(u) = 5u^2$ y $u = g(x) = 1 - 2x$, se pueden expresar como una función compuesta:

$$y = f(u) = f(g(x)) = 5(1 - 2x)^2$$

La función anterior se denomina **función de función**, ya que y no está definida como función de x en forma directa, sino que se presenta como función de otra variable u que se define como función de x.

Regla de la cadena

Para determinar $\dfrac{dy}{dx}$ de la función compuesta es necesario considerar a las dos funciones en forma individual y derivarlas de igual manera. La regla de la cadena constituye la fórmula fundamental de derivación número 9, si $y = f(u)$ es una función diferenciable de u y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x entonces para la función compuesta $y = f(g(x))$, la derivada de f con respecto a x es igual al producto de la derivada de f con respecto a u por la derivada de u con respecto a x.

$$\left.\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \right\} \quad \text{Fórmula fundamental de derivación número 9.}$$

También se expresa como:

$$\frac{dy}{dx} f'(u) \cdot g'(x)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Al aplicar la regla de la cadena, encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones compuestas.

1. $y = \dfrac{u+a}{u-a}$, si $u = x^3\,4x$

   Primero se calcula la derivada de u en dx:

   $$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x)^2 - \frac{d}{dx}(4x)$$

   $$\frac{du}{dx} = 2x - 4$$

   Ahora se calcula la derivada de y en du:

   $$\frac{dy}{du} = \frac{(u-a)\dfrac{d}{du}(u+a) - (u+a)\dfrac{d}{du}(u-a)}{(u-a)^2}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{(u-a)(1)-(u+a)(1)}{(u-a)^2}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{\cancel{u}-a-\cancel{u}-a}{(u-a)^2}=\frac{-2a}{(u-a)^2}$$

$$\frac{dy}{du}=-\frac{2a}{(u-a)^2}$$

Al utilizar la regla de la cadena, se calcula la derivada de y en dx:

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left[-\frac{2a}{(u-a)^2}\right](2x-4)\ \Big\}$$ Al sustituir u en el resultado, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8a-4ax}{(x^2-4x-a)^2}$$

2. $y=2u^5$ $\qquad u=2\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{du}=\frac{d}{du}(2u^5) \qquad \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right)$$

$$\frac{dy}{du}=10u^4 \qquad \frac{du}{dx}=2\left[\frac{\frac{d}{dx}(x)}{2(x)^{\frac{2-1}{2}}}\right]$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Al utilizar la regla de cadena, se calcula la derivada de y en dx:

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}(10u^4)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{10u^4}{\sqrt{x}}\ \Big\}$$ Al sustituir u en el resultado, se tiene que:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{10\left(2\sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{x}}=\frac{10(16\cancel{x^2})}{\sqrt{\cancel{x^2}}}=160x^{\frac{3}{2}}=160x\sqrt{x}$$

La regla de la cadena permite demostrar la fórmula fundamental de derivación número **6**, que se denomina regla general de las potencias.
Sea $y=v^n$, donde v es una función diferenciable de x y n un número real, al aplicar la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{d(v^n)}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Al evaluar la función $y=v^n$ con respecto a v, se tiene que $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{dv}{dx}$.

Al hacer $v=x$ y al aplicar la fórmula fundamental de derivación número **6a**, resulta:

$$\frac{d\left(v^n\right)}{dv}=\frac{d\left(x^n\right)}{dv}=nx^{n-1}=nv^{n-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para $y = (2x - 1)^3$.

a) Solución por la regla de la cadena.

Si $y = (2x - 1)^3$, hacer $u = 2x - 1$ y $y = u^3$; al derivar se tiene:

$$y = u^3 \qquad\qquad u = 2x - 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^2) \qquad\qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad\qquad \frac{du}{dx} = 2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (3u^2)(2) = 6u^2 \quad \Big\}\ \text{Al sustituir } u \text{ en el resultado, se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(2x - 1)^2$$

b) Solución por la regla de las potencias.

Si $y = (2x - 1)^3$

$$y' = \frac{d}{dx}[(2x-1)^3] = 3(2x-1)^{3-1}\frac{d}{dx}(2x-1) = 3(2x-1)^2(2)$$

$$\therefore\ y' = 6(2x-1)^2$$

2 Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para $y = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Solución por la regla de la cadena.

Si $y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, hacer $u = 1 - x^2$ y $y = u^{\frac{1}{2}}$; al derivar se tiene:

$$y = u^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad u = 1 - x^2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^{\frac{1}{2}}) \qquad\qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \qquad\qquad \frac{du}{dx} = -2x^{2-1}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \qquad\qquad \frac{du}{dx} = -2x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}\right)(-2x) = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{u}} = -\frac{x}{\sqrt{u}} \quad \Big\}\ \text{Al sustituir } u \text{ en el resultado se tiene que:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Solución por la regla general de las potencias.

Si $y=\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(1-x^2)=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dx}(1)-\frac{d}{dx}(x^2)\right]$$

$$y'=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}(0-2x^{2-1})=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

3 ••Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para $y=\sqrt{\frac{4-x^2}{4x}}$.

a) Solución por la regla de la cadena.

Si $y=\sqrt{\frac{4-x^2}{4x}}=\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^{\frac{1}{2}}$, hacer $u=\frac{4-x^2}{4x}$ y $y=u^{\frac{1}{2}}$; al derivar se tiene:

$$y=u^{\frac{1}{2}} \qquad u=\frac{4-x^2}{4x}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{d}{du}(u^{\frac{1}{2}}) \qquad \frac{du}{dx}=\frac{4x\frac{d}{dx}(4-x^2)-(4-x^2)\frac{d}{dx}(4x)}{(4x)^2}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \qquad \frac{du}{dx}=\frac{4x(-2x)-(4-x^2)(4)}{16x^2}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{du}{dx}=\frac{-8x^2-16+4x^2}{16x^2}=\frac{-4(x^2+4)}{16x^2}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \frac{du}{dx}=-\frac{(x^2+4)}{4x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)\left[-\frac{(x^2+4)}{4x^2}\right]=-\frac{(x^2+4)}{8\sqrt{u}\,x^2}$$

Al sustituir u en el resultado, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(x^2+4)}{8\sqrt{\frac{4-x^2}{4x}}\,x^2}=-\frac{(x^2+4)}{\frac{8x^2\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{x}}}=-\frac{(x^2+4)}{4x^{\frac{3}{2}}\sqrt{4-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(x^2+4)}{4\sqrt{x^3(4-x^2)}}$$

b) Solución por la regla general de las potencias.

Si $y=\left(\dfrac{4-x^2}{4x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{4x\dfrac{d\left(4x^2\right)}{dx}-(4-x^2)\dfrac{d\left(4x\right)}{dx}}{(4x)^2}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2\left(\dfrac{4-x^2}{4x}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{4x(-2x)-(4-x^2)(4)}{16x^2}\right]$$

$$y'=\frac{-8x^2-16+4x^2}{\dfrac{\cancel{32x^2}\sqrt{4-x^2}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{x}}}}=\frac{\cancel{-4}(x^2+4)}{\cancel{16}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{4-x^2}}=-\frac{(x^2+4)}{4\sqrt{x^3(4-x^2)}}$$

Funciones inversas

Sea la ecuación $y=f(x)$, una función y dada como función de x; por lo general, es posible resolver la ecuación con respecto a x y determinar $x=g(y)$, es decir, también se puede considerar a y como la variable independiente y a x como la variable dependiente. Con base en lo anterior se establece que $f(x)$ y $g(y)$ son funciones inversas entre sí.

Para distinguir la una de la otra, denominamos **función directa** a la primera de las funciones dadas y **función inversa** a la segunda función.

Ejemplos

Función directa	*Función inversa*
$y=5-x^2$	$x=\pm\sqrt{5-y}$
$y=10^x$	$x=\log y$
$y=\tan x$	$x=\arctan y$
$y=e^x$	$x=\ln y$

Si $y=f(x)$ es una función derivable tal que y' no es cero, entonces la derivada de la función inversa f^{-1} es igual al recíproco de la derivada de la función directa. Análogamente, si $x=f^{-1}(y)$ es una función derivable tal que x' no es cero, entonces la derivada de la función directa es igual al recíproco de la derivada de la función inversa.

La relación entre las derivadas de las funciones inversas se presenta en la siguiente fórmula fundamental de derivación:

$$\left.\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right\}$$ Fórmula fundamental de derivación número 10.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dada la función $x=\sqrt{5-y}$, encuentra $\frac{dy}{dx}$ aplicando la fórmula para la derivación de funciones inversas, comprueba el resultado despejando y y deriva con respecto a x.

Si $x=\sqrt{5-y}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\sqrt{5-y}\right)=\frac{\frac{d}{dy}(5-y)}{2(5-y)^{\frac{2-1}{1}}}=\frac{\frac{d}{dy}(5)-\frac{d}{dy}(y)}{2(5-y)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-1}{2\sqrt{5-y}}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=-\frac{1}{2\sqrt{5-y}}$$

Al aplicar la fórmula para la derivación de funciones inversas, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{5-y}}}=-2\sqrt{5-y}$$

Para comprobar el resultado, se despeja a y como función de x y se deriva, lo que resulta:

$$x=\sqrt{5-y} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(5)-\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$x^2=5-y \qquad \frac{dy}{dx}=-2x$$

$$y=5-x^2$$

Al sustituir $y=5-x^2$ en $\frac{dy}{dx}=-2\sqrt{5-y}$, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=-2\sqrt{5-(5-x^2)}=-2\sqrt{\cancel{5}-\cancel{5}+x^2}=-2x$$

Por lo tanto, se comprueba que las derivadas son iguales.

2 ●●·Calcula $\frac{dy}{dx}$ para $x=(1+2y)^3$ por dos métodos diferentes y comprueba que se llega al mismo resultado.

Si $x=(1+2y)^3$, entonces al derivar se tiene:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}[(1+2y)^3]=3(1+2y)^{3-1}\frac{d}{dy}(1+2y)=3(1+2y)^2(2)$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dy}=6(1+2y)^2$$

Por la fórmula de derivación de funciones inversas número 10 se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=\frac{1}{6(1+2y)^2}$$

Al despejar a y de $x=(1+2y)^3$, se tiene:

$$x=(1+2y)^3$$
$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(1+2y)^3}$$
$$\sqrt[3]{x}=1+2y$$

$$2y=\sqrt[3]{x}-1$$
$$y=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{2}$$

$$\therefore\quad y=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\frac{1}{2}$$

Al derivar con respecto a x se tiene:

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\frac{d(x)}{dx}}{3(x)^{\frac{3-1}{3}}}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3(x)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$$

Si $x=(1+2y)^3$, al sustituirlo en $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$ resulta:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6\left[(1+2y)^3\right]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{6(1+2y)^2}$$

Por lo tanto, se comprueba que las derivadas son iguales.

Derivada del valor absoluto

Si $f(v) = |v|$, donde v es una función diferenciable de x, se establece que la derivada de f con respecto a x es igual al cociente de la función entre el valor absoluto de dicha función multiplicado por la derivada de v con respecto a x:

$$\left.\frac{d}{dx}(|v|)=\frac{v}{|v|}=\frac{dv}{dx}\quad\right\}\ \text{Fórmula fundamental de derivación número 11.}$$

donde $v(x)$ debe ser diferente de cero.

La derivada de la función valor absoluto es un caso particular de la derivada general de potencias, ya que:

Si $|v|=\sqrt{v^2}$ al derivar resulta:

$$\frac{d}{dx}(|v|)=\frac{d}{dx}\sqrt{v^2}=\frac{\frac{d}{dx}(v^2)}{2(v^2)^{\frac{2-1}{2}}}=\frac{2v\frac{dv}{dx}}{2(v^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{v}{\sqrt{v^2}}\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(|v|)=\frac{v}{|v|}\frac{dv}{dx}$$

En la aplicación de esta fórmula deberá observarse que:

$$\frac{v}{|v|}=\begin{cases}+1, & \text{si } v>0\\ -1, & \text{si } v<0\end{cases}$$

Ejemplo

1. Encuentra la derivada para la función $y = |x^2 - 1|$.

   Si $y = |x^2 - 1|$ al derivar resulta:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(|x^2-1|)=\frac{x^2-1}{|x^2-1|}\ \frac{d}{dx}(x^2-1)=\frac{x^2-1}{|x^2-1|}\ (2x)$$

Si $\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}\ \begin{cases}+1, & \text{para } x^2-1>0\\ -1, & \text{para } x^2-1<0\end{cases}$ entonces:

$$\frac{dy}{dx}=(1)(2x)=2x;\ \text{para } x^2-1>0$$
$$\frac{dy}{dx}=(-1)(2x)=-2x;\ \text{para } x^2-1<0$$

EJERCICIO 13

I. En grupo y con asesoría de su profesor, aplicando la regla de la cadena, encuentren $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones compuestas. Concluyan los pasos para la solución.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $y=\sqrt[3]{u^2+2}$
   $u=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
2. $y=u^3-3u+5$
   $u=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+3$
3. $y=\sqrt{u}$
   $u=\dfrac{x-1}{x+1}$
4. $y=u^3+4$
   $u=x^2+2x$
5. $y=\sqrt{1+u}$
   $u=\sqrt{x}$
6. $y=u(3-2u)$
   $u=x^2$
7. $y=1+u^2$
   $u=\sqrt{x}$
8. $y=u^8$
   $u=1-x^2$
9. $y=\sqrt{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}$
   $u=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$
10. $y=\dfrac{u+a}{u-a}$
    $u=x^2-4x$
11. $y=\dfrac{3u+4}{5u-3}$
    $u=\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$
12. $y=\sqrt{\dfrac{u-1}{u+1}}$
    $u=x(3-2x)$
13. $y=\dfrac{b+u}{\sqrt{u}}$
    $u=\dfrac{x}{\sqrt{b-x}}$
14. $y=\sqrt{\dfrac{a-u}{a+u}}$
    $u=\sqrt{a^2-x^2}$
15. $y=\dfrac{u^2+4}{u^2-2}$
    $u=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$
16. $y=\sqrt{u}\,(a^2-u^2)$
    $u=\sqrt{1-x^2}$
17. $y=\dfrac{u^2+2}{u^2-2}$
    $u=(x+1)^2$
18. $y=\dfrac{a^2-u^2}{a^2+u^2}$
    $u=ax-x^2$
19. $y=u(2u-3)$
    $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
20. $y=\sqrt{1-u^2}$
    $u=\sqrt{1+x^2}$

II. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para las funciones dadas, resuelve por la regla de la cadena y la regla general de las potencias.

1. $y=(2x^3+3x^2-4)^{12}$
2. $y=\sqrt{x-x^3}$
3. $y=(3x+2)^5$
4. $y=(x^2+1)^3$
5. $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x+1}}$
6. $y=\sqrt{(3x+1)^3}$
7. $y=\left(\sqrt{x}-1\right)^8$
8. $y=\sqrt[3]{8-x^3}$
9. $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$
10. $y=\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$
11. $y=\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x^2}}$
12. $y=\sqrt{2-3x^2}$

III. Dadas las siguientes funciones, encuentra $\frac{dy}{dx}$ aplicando la fórmula para la derivación de funciones inversas, comprueba el resultado despejando y y deriva con respecto a x.

1. $x = y\sqrt{1-y^2}$
2. $x = 3y^2 - 4y + 7$
3. $x = \frac{y^2}{\sqrt{4-y^2}}$
4. $x = \frac{1}{4+y}$
5. $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$
6. $x = \sqrt{y^2 + a^2}$
7. $x = 2y^2\sqrt{2-y}$
8. $x = y^3 - 2y$
9. $x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
10. $x = \frac{a^2 y}{a^2 + y^2}$
11. $x = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a^2}$
12. $x = \sqrt{\frac{1-3y}{3-y}}$
13. $x = \frac{3+y}{3-y}$
14. $x = \frac{2y+3}{3-y}$
15. $x = \frac{1}{y^2}$
16. $x = \frac{4}{y^3+1}$
17. $x = \frac{2y-1}{y}$
18. $x = (y+2)^3$
19. $x = y^2 - \frac{1}{y}$
20. $x = y^5 + ay^3 - \sqrt{y}$

IV. Deriva las siguientes funciones de valor absoluto.

1. $y = |x|$
2. $y = |x^2 - 2x + 4|$
3. $y = |\sqrt{x}|$
4. $y = \left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|$
5. $y = |x^2 - x|$
6. $y = \left|\sqrt{1-x^2}\right|$
7. $y = |x-3|$
8. $y = \left|\frac{a-x}{a+x}\right|$
9. $y = \left|\frac{9-2x}{3-x}\right|$
10. $y = \left|\frac{a}{x}\right|$
11. $y = \left|\frac{x}{2}\right|$
12. $y = |x^2 + 3|$
13. $y = |x| - x$
14. $y = \frac{|x+2|}{x+2}$
15. $y = \left|\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right|$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Derivación de funciones implícitas

Formas explícita e implícita de una ecuación

Las ecuaciones en dos variables se expresan generalmente en forma **explícita**, es decir, una de las dos variables se da explícitamente en términos de la otra; por ejemplo:

a) $y = x^2 - 4x + 4$ *b*) $u = 8 - 5v$ *c*) $s = \sqrt{2t-1}$

Las ecuaciones están resueltas para y, u y s como funciones explícitas de x, v y t, respectivamente. Cuando se presenta una relación entre dos variables por medio de una ecuación no explícita para ninguna de las variables, entonces una de ellas es función implícita de la otra; por ejemplo:

a) $x^2 - 2xy + y^2 = 6$ *b*) $x^2 + y^2 = r^2$ *c*) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

Las ecuaciones anteriores se definen como y función implícita de x, aunque también se puede definir como x función implícita de y.

A veces se puede resolver la ecuación dada en forma de función implícita con respecto a una de las variables, para dar lugar a una función explícita, por ejemplo:

$$4x^2 - 8y + 12 = 0 \quad \} \text{ Función implícita.}$$
$$4x^2 = 8y - 12$$
$$x^2 = \frac{8y-12}{4} = \frac{4(2y-3)}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{2y-3} \quad \} \text{ Función explícita.}$$

$$4x^2 - 8y + 12 = 0 \quad \} \text{ Función implícita.}$$
$$-8y = -4x^2 - 12$$
$$y = \frac{-4x^2-12}{-8} = \frac{-4(x^2+3)}{-8}$$
$$y = \frac{x^2+3}{2} \quad \} \text{ Función explícita.}$$

Técnica para derivar funciones implícitas

Si se da una función implícita, no siempre es conveniente el convertirla en función explícita para derivarla. Para determinar la derivada de una función implícita, aplicaremos una técnica sencilla que consiste en dos pasos:

a) Derivar la función dada, término a término, considerando a y como función de x.

b) De la ecuación resultante se despeja $\frac{dy}{dx}$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones implícitas.

1. $x^2 - 2xy + y^2 = 6$

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(6)$$
$$2x^{2-1} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{d}{dx}(x) + 2y^{2-1}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(2y-2x) = 2y - 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-2x}{2y-2x}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$$

2. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=a$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}+\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=a$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{d}{dx}(a)$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)-y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}=0$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^{\frac{1}{2}-1}\right)-x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(y^{\frac{1}{2}-1}\right)\frac{d}{dx}}{y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(y^{\frac{1}{2}-1}\right)\frac{d}{dx}-y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^{\frac{1}{2}-1}\right)}{x}=0$$

$$\frac{\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{y}+\frac{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d}{dx}\right)-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}}{x}=0$$

$$\frac{\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}}{y}+\frac{\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}}{x}=0$$

$$\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y\sqrt{xy}}+\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{2x\sqrt{xy}}=0$$

$$\frac{x\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)+y\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)}{2xy\sqrt{xy}}=0$$

$$xy-x^2\frac{dy}{dx}+xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$$

$$\frac{dy}{dx}(xy-x^2)=y^2-xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-xy}{xy-x^2}=\frac{y\,\cancel{(y-x)}}{x\,\cancel{(y-x)}}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

2 Encuentra la pendiente de cada una de las siguientes curvas en el punto indicado.

1. $x^3 - 2xy + y^3 = 5$; $P(1,1)$

$$\frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$3x^{3-1} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dx}{dx} + 3y^{3-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 2x) = 2y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x} = m$$

Para calcular la pendiente de la tangente a la curva en el punto $P(1,1)$ se sustituyen los valores de x y y en la derivada previamente calculada, es decir:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{2(1) - 3(1)^2}{3(1)^2 - 2(1)} = \frac{2-3}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1$$

2. $x^2 - 2\sqrt{xy} - y^2 = 11$; $P(4,1)$

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{xy}\right) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(11)$$

$$2x^{2-1} - 2x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) - 2y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 2y^{2-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 2x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(y^{\frac{1}{2}-1}\right)\frac{dy}{dx} - 2y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^{\frac{1}{2}-1}\right) - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - \frac{\cancel{2}x^{\frac{1}{2}}}{\cancel{2}y^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\cancel{2}y^{\frac{1}{2}}}{\cancel{2}x^{\frac{1}{2}}} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x\frac{dy}{dx} - y - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\frac{dy}{dx}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x\frac{dy}{dx} - y - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right) = y - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{-x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y - 2\sqrt{x^3y}}{x + 2\sqrt{xy^3}} = m$$

Al evaluar la pendiente de la curva en el punto $P(4,1)$ resulta:

$$m=\frac{dy}{dx}=-\frac{(1)-2\sqrt{(4)^3(1)}}{(4)+2\sqrt{(4)(1)^3}}=-\frac{1-2(8)}{4+2(2)}=-\frac{-15}{8}=\frac{15}{8}$$

3. $y^3+(x-y)^2=7+xy$; $P(1,2)$

$$\frac{d}{dx}(y)^3+\frac{d}{dx}(y-x)^2=\frac{d}{dx}(7)+\frac{d}{dx}(xy)$$

$$3y^{3-1}\frac{dy}{dx}+2(y-x)^{2-1}\frac{d}{dx}(y-x)=0+x\frac{dy}{dx}+y(1)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2(y-x)\left(\frac{dy}{dx}-1\right)=x\frac{dy}{dx}+y$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-2y-2x\frac{dy}{dx}+2x-x\frac{dy}{dx}=y$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2+2y-3x)=y+2y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-2x}{3y^2+2y-3x}=m$$

Al evaluar la pendiente de la curva en el punto $P(1,2)$ resulta:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{3(2)-2(1)}{3(2)^2+2(2)-3(1)}=\frac{6-2}{12+4-3}=\frac{4}{13}$$

3 ●•·Resuelve los siguientes problemas generales, aplicando la derivación de funciones implícitas.

1. Encuentra las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $x^2+y^2=25$ en los puntos $A(-3,4)$ y $B(4,3)$ y construye la gráfica correspondiente.

   Mediante la derivación implícita se tiene la pendiente de la recta tangente a la curva:

$$x^2+y^2=25$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(25)$$

$$2x^{2-1}+2y^{2-1}\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+2y\frac{d}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y}=-\frac{x}{y}=m$$

Al sustituir los valores de los puntos dados, resulta:

$$m_A=-\frac{-3}{4}=\frac{3}{4} \qquad m_B=-\frac{3}{4}$$

Para determinar la ecuación de la recta tangente en cada punto dado, se tiene que:

$$y - y_1 = m_A(x - x_1)$$
$$y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3)$$
$$4y - 16 = 3x + 9$$
$$3x - 4y + 9 + 16 = 0$$
$$3x - 4y + 25 = 0 \quad \} \text{ Ecuación de la tangente en el punto } A.$$

$$y - y_1 = m_B(x - x_1)$$
$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$
$$3y - 9 = -4x + 16$$
$$4x + 3y - 9 - 16 = 0$$
$$4x + 3y - 25 = 0 \quad \} \text{ Ecuación de la tangente en el punto } B.$$

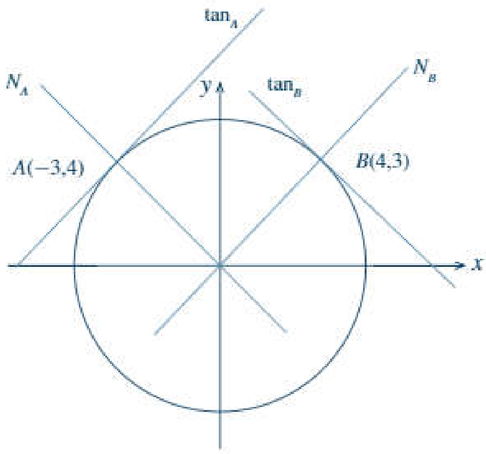
Para determinar la ecuación de la recta normal en cada punto dado, se utilizan las pendientes recíprocas y de signo contrario, lo que resulta:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_A}(x - x_1)$$
$$y - 4 = -\frac{1}{\frac{3}{4}}(x + 3)$$
$$y - 4 = -\frac{4}{3}(x + 3)$$
$$3y - 12 = -4x - 12$$
$$4x + 3y - 12 + 12 = 0$$
$$4x + 3y = 0 \quad \} \text{ Ecuación de la normal en el punto } A.$$

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_B}(x - x_1)$$
$$y - 3 = -\frac{1}{-\frac{4}{3}}(x - 4)$$
$$y - 3 = \frac{3}{4}(x - 4)$$
$$4y - 12 = 3x - 12$$
$$3x - 4y - 12 + 12 = 0$$
$$3x - 4y = 0 \quad \} \text{ Ecuación de la normal en el punto } B.$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $x^2 + y^2 = 25$ se despeja a y, $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, entonces:

x	y
0	±5
±1	±4.89
±2	±4.58
±3	±4
±4	±3
±5	0



2. Encuentra las ecuaciones de las tangentes horizontales y verticales a la curva $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$ y construye la gráfica correspondiente.

$$25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$$
$$\frac{d}{dx}(25x^2) + \frac{d}{dx}(16y^2) + \frac{d}{dx}(200x) - \frac{d}{dx}(160y) + \frac{d}{dx}(400) = 0$$
$$25(2)(x^{2-1}) + 16(2)(y^{2-1})\frac{dy}{dx} + 200 - 160\frac{dy}{dx} = 0$$
$$50x + 32y\frac{dy}{dx} + 200 - 160\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(32y - 160) = -50x - 200$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-50x - 200}{32y - 160} = \frac{-25x - 100}{16y - 80} = m$$

Para determinar los puntos de tangencia de las rectas tangentes horizontales, se iguala a cero el numerador de la derivada, lo que resulta:

$$-25 - 100 = 0$$
$$-25x = 100$$
$$x = \frac{100}{-25} = -4$$

Ahora, se sustituye $x = 4$ en la ecuación de la curva para determinar el valor de y.

$$\begin{aligned} 25(-4)^2 + 16y^2 + 200(-4) - 160y + 400 &= 0 \\ \cancel{400} + 16y^2 - \cancel{800} - 160y + \cancel{400} &= 0 \\ 16y^2 - 160y &= 0 \\ 16y(y - 10) &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación de segundo grado es igual a cero cuando uno de los dos multiplicandos es igual a cero, es decir:

$$\begin{aligned} 16y &= 0 & \qquad y - 10 &= 0 \\ y &= 0 & y &= 10 \end{aligned}$$

$\therefore$ Las coordenadas de los puntos de tangencia son $A(-4,0)$ y $A'(-4,10)$ para las tangentes horizontales.

Para determinar los puntos de tangencia de las rectas tangentes verticales, se iguala a cero el denominador de la derivada, lo que resulta:

$$\begin{aligned} 16y - 80 &= 0 \\ 16y &= 80 \\ y &= \frac{80}{16} = 5 \end{aligned}$$

Ahora, se sustituye $y = 5$ en la ecuación de la curva para determinar el valor de x.

$$\begin{aligned} 25x^2 + 16(5)^2 + 200x - 160(5) + 400 &= 0 \\ 25x^2 + \cancel{400} + 200x - \cancel{800} + \cancel{400} &= 0 \\ 25x^2 + 200x &= 0 \\ 25x(x + 8) &= 0 \end{aligned}$$

Se iguala a cero cada multiplicando del lado derecho, lo que resulta:

$$\begin{aligned} 25x &= 0 & \qquad x + 8 &= 0 \\ x &= 0 & x &= -8 \end{aligned}$$

$\therefore$ Las coordenadas de los puntos de tangencia son $B(0,5)$ y $B'(-8,5)$ para las tangentes verticales.

Para determinar las pendientes y ecuaciones se tiene para:

Tangentes horizontales

Para $A(-4,0)$:

$$m_A = \frac{-25(-4)-100}{(0)-80} = 0$$

Para $A'(-4,10)$:

$$m_{A'} = \frac{-25(-4)-100}{16(10)-80} = 0$$

Tangentes verticales

Para $B(0,5)$:

$$m_B = \frac{-25(0)-100}{16(0)-80} = \frac{-100}{0} = \infty$$

Para $B'(-8,5)$:

$$m_{B'} = \frac{-25(-8)-100}{16(5)-80} = \frac{-100}{0} = \infty$$

En las tangentes horizontales, el ángulo de inclinación es de 0°, por lo que su pendiente es cero; en las tangentes verticales, el ángulo de inclinación es de 90°, por lo que su pendiente es indeterminada (∞).

$$y - y_1 = m_A(x - x_1)$$
$$y - 0 = 0(x+4)$$
$$\therefore\ y = 0 \ \} \text{ Tangente horizontal en } A.$$

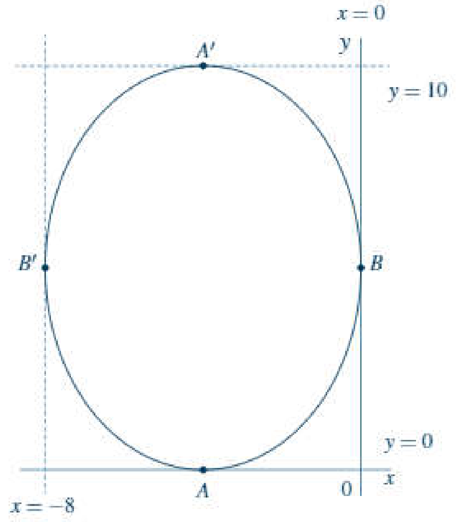
$$y - y_1 = m_{A'}(x - x_1)$$
$$y - 10 = 0(x+4)$$
$$\therefore\ y = 10 \ \} \text{ Tangente horizontal en } A'.$$

$$y - y_1 = m_B(x - x_1)$$
$$(0)(y-5) = -100(x-8)$$
$$\therefore\ y = 0 \ \} \text{ Tangente vertical en } B.$$

$$y - y_1 = m_{B'}(x - x_1)$$
$$(0)(y-5) = -100(x-8)$$
$$\therefore\ y = -8 \ \} \text{ Tangente vertical en } B'.$$

Para realizar la gráfica correspondiente de $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$ se tiene que:

x	y
−8	5
−7	8.30 1.69
−6	9.33 0.66
−5	9.84 0.15
−4	10 0
−3	9.84 0.15
−2	9.33 0.66
−1	8.30 1.69
0	5
1	*i*
2	*i*



3. Encuentra el ángulo de intersección para las curvas $x^2 + 4y^2 = 61$ y $2x^2 - y^2 = 41$ y construye la gráfica correspondiente.

Primero se encuentra la fórmula para la pendiente de la tangente a cada curva, usando la derivación implícita:

$$\begin{aligned} x^2+4y^2&=61\\ \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(4y^2)&=\frac{d}{dx}(61)\\ 2x^{2-1}+4(2)(y^{2-1})\frac{dy}{dx}&=0\\ 2x+8y\frac{dy}{dx}&=0\\ 8y\frac{dy}{dx}&=-2x\\ \frac{d}{dx}=\frac{-2}{8y}&=-\frac{x}{4y}=m_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2-y^2&=41\\ \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(4y^2)&=\frac{d}{dx}(41)\\ 2(2)(x^{2-1})-2y^{2-1}\frac{dy}{dx}&=0\\ 4x-2y\frac{dy}{dx}&=0\\ -2y\frac{dy}{dx}&=-4x\\ \frac{dy}{dx}=\frac{-4x}{-2y}&=\frac{2x}{y}=m_2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones dadas, se obtiene el punto de intersección entre las dos curvas.

$$\begin{aligned} x^2+4y^2&=61 \quad \textbf{(1)}\\ 2x^2-y^2&=41 \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación (**2**) por 4 y sumarle la ecuación (**1**) se tiene:

$$4(2x^2-y^2=41) \quad \textbf{(2)}$$

$$\begin{aligned} 8x^2-4y^2&=164\\ +\quad x^2+4y^2&=\ \ 61 \quad \textbf{(1)}\\ \hline 9x^2\qquad\quad &=225\\ x^2=\frac{225}{9}&=25\\ \therefore\quad x&=\pm 5 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de x en cualquiera de las ecuaciones dadas, resulta:

$$\begin{aligned} x^2+4y^2&=61 \quad \textbf{(1)}\\ (\pm5)^2+4y^2&=61\\ 25+4y^2&=61\\ 4y^2&=61-25\\ y^2=\frac{36}{4}&=9\\ y&=\pm3 \end{aligned}$$

$\therefore$ Las curvas se intersectan en los puntos $A(5,3)$ y $A'(-5,-3)$.

Dados los puntos de intersección, ahora se calculan las pendientes. Los pendientes para A son:

$$m_1 = -\frac{x}{4y} = -\frac{5}{4(3)} \qquad m_2 = \frac{2x}{y} = \frac{2(5)}{3}$$

$$m_1 = -\frac{5}{12} \qquad m_2 = \frac{10}{3}$$

Las pendientes para A' son:

$$m_1 = -\frac{x}{4y} = -\frac{-5}{4(-3)} = -\frac{-5}{-12} \qquad m_2 = \frac{2x}{y} = \frac{2(-5)}{-3} = \frac{-10}{-3}$$

$$m_1 = -\frac{5}{12} \qquad m_2 = \frac{10}{3}$$

Dados los resultados anteriores se observa que las pendientes son iguales.

El ángulo de intersección entre las curvas es el mismo que el ángulo con que se intersectan las tangentes. Para calcular dicho ángulo se utiliza:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{10}{3} + \frac{5}{12}}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)\left(\frac{10}{3}\right)} = \frac{\frac{4(10)+5}{12}}{1 - \frac{50}{36}} = \frac{\frac{45}{12}}{-\frac{14}{36}}$$

$$\tan\theta = -\frac{(45)(36)}{(12)(14)} = -\frac{1620}{168} = 9.6428$$

$$\theta = \arctan(-9.6428)$$

$$\theta = -84°04'5''$$

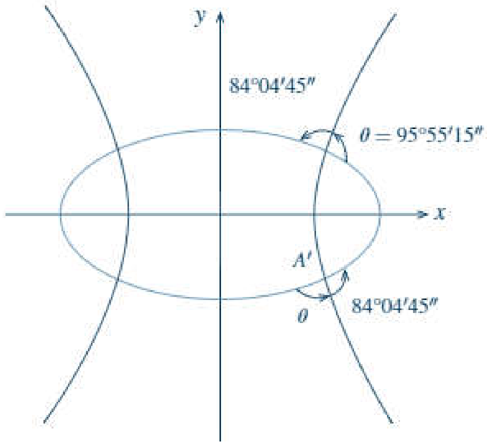
$$\theta = \begin{cases} 179°59'60'' \\ \underline{-84°04'45''} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \theta = 95°55'15''$$

Para realizar las gráficas correspondientes de $x^2 + 4y^2 = 61$ y $2x^2 - y^2 = 41$ se tiene:

x	y
0	±3.9
±1	±3.8
±2	±3.7
±3	±3.6
±4	±3.3
±5	±3
±6	±2.5
±7	±1.7
±8	*i*

x	y
±5	±3
±6	±5.5
±7	±7.5
±8	±9.3
0	*i*



4. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio de 112m de altura; la ecuación que describe el movimiento de la pelota es $s = -16t^2 + 96t$, donde s representa la distancia dirigida de la pelota desde el punto de partida en un tiempo t en segundos, encuentra:

   a) La velocidad instantánea de la pelota en un t de 2s.

   b) La altura máxima que alcanza la pelota.

   c) El tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.

   d) La velocidad instantánea de la pelota al llegar al suelo.

Solución

a) $s = -16t^2 + 96t$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(-16t^2) + \frac{d}{dt}(96t)$$
$$\frac{ds}{dt} = -16(2)(t^{2-1}) + 96$$
$$\frac{ds}{dt} = -32t + 96$$

Cuando $t = 2$ s, la velocidad instantánea es de:

$$v = \frac{ds}{dt} = -32(2) + 96 = -64 + 96 = 32\text{m/s}$$

b) Para la altura máxima, se considera que la velocidad (v) es cero, resultando un tiempo (t) de:

$$v = \frac{ds}{dt} = -32(2) + 96$$
$$0 = -32t + 96$$
$$-32t = -96$$
$$t = \frac{-96}{-32}$$
$$\therefore \quad t = 3\text{s}$$

Para el tiempo determinado, se obtiene que su altura (s) máxima es:

$$s = -16t^2 + 96t$$
$$s = -16(3)^2 + 96(3)$$
$$s = -144 + 288$$
$$s = 144\text{m} \quad \Big\} \text{ Altura máxima considerada desde el punto de lanzamiento.}$$

Si a dicho resultado se le suma la altura del edificio, tenemos que:

$$s = 144\text{m} + 112\text{m} = 256\text{m} \quad \} \text{ Altura máxima considerada desde el suelo.}$$

c) La pelota alcanza el suelo cuando la distancia (s) es cero, por lo que su ecuación es: $s = -16t^2 + 96t + 112$, en donde 112m es la altura del edificio.

$$0 = -16t^2 + 96t + 112$$
$$16t^2 - 96t - 112 = 0$$
$$t^2 - 6t - 7 = 0$$
$$(t-7)(t+1) = 0$$
$$t - 7 = 0 \qquad t + 1 = 0$$
$$t_1 = 7 \qquad t_2 = -1$$

$\therefore$ Como sólo se considera tiempos positivos, tenemos que el tiempo en que tarda la pelota en llegar al suelo es de 7s.

d) Cuando $t = 7$s, la velocidad instantánea de la pelota al llegar al suelo es:

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 96$$
$$v = -32(7) + 96$$
$$v = -128\text{m/s}$$

$\therefore$ El signo negativo de la velocidad indica que su movimiento es hacia abajo.

EJERCICIO 14

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones implícitas.

1. $y^5 + 3y^3 + 9y - 9x = 27$
2. $y = \sqrt{xy} + \sqrt[3]{x}$
3. $x^2 = 4py$
4. $y^2 + x^2 = r^2$
5. $ax^2 + by^2 = a^2b^2$
6. $x - \sqrt{xy} + y = 1$
7. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - y^3 = 3$
8. $2x^3 + 7x^2y + y^3 = a^3$
9. $2x^4 + 8x^3y + 2y^4 = 40$
10. $ax^3 - 3a^2xy + ay^3 = c$
11. $\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y}} = a$
12. $y^2 = \frac{y+2x}{y-2x}$
13. $x\sqrt{2+3y} + y\sqrt{1+y} = y$
14. $x^2y^3 = y^4 - x^4$
15. $\sqrt{xy} + 2y = \sqrt{x}$
16. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$
17. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^3 + y^3$
18. $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = c$
19. $x^3 + 3xy^2 + y^2 - 2xy = 6$
20. $\sqrt{xy} + 2xy - \sqrt{2y} = 0$
21. $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$
22. $y^3 + 3x^2y + x^2 - 2xy = 3$
23. $x^3 + y^3 - x^2y = a^3$
24. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$
25. $x^2 = \frac{y^2 - a}{y^2 + a}$

II. Encuentra la pendiente de cada una de las siguientes curvas en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 = 4$; $P(2,0)$
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$; $P(9,36)$
3. $\sqrt{xy} + 2y = x$; $P(4,1)$
4. $x^{23} + y^{23} = 5$; $P(8,1)$
5. $(x - y^2)\ (x + xy) = 4$; $P(2,1)$
6. $\sqrt{2y} + \sqrt{3x} = 5$; $P(3,2)$
7. $x^2y + xy^2 = 12$; $P(3,1)$
8. $x^2 - y^2 = 3$; $P(2,1)$
9. $2y^3 + 4xy + x^2 = 7$; $P(1,1)$
10. $x^5 + y^3x + x^2y + y^5 = 4$; $P(1,1)$
11. $x^3y^2 - 2x + y^3 = 321$; $P(2,5)$
12. $2x^3y - 2 = x^4 - 2y^4$; $P(2,1)$
13. $2x - y - x^2y + 3y^2x = 5$; $P(3,1)$
14. $2y^2x = \sqrt{x^2 + 3y^2} + 12$; $P(2,2)$
15. $x^3 - y^3 = 5xy - 3$; $P(2,1)$

III. Resuelve los siguientes problemas generales aplicando la derivación de funciones implícitas y en plenaria discute tus resultados.

1. Encuentra las ecuaciones de la tangente y la normal a las curvas siguientes en el punto dado.

   a) $2y^2 - xy + x^2 = 16$; $P(2,3)$

   b) $x^2 + 2x - 4y = -4$; $P(-2,1)$

   c) $y^2 - 4x^2 = 9$; $P(2,5)$

   d) $x^2 + xy + 2 = 0$; $P(-2,3)$

   e) $3x^2 - 2y^2 = 10$; $P(-2,1)$

   f) $x^2 + y^2 = 9$; $P(2,\sqrt{5})$

2. Encuentra en qué puntos de las siguientes curvas la tangente es horizontal y vertical.

   a) $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$

   b) $x^2 + 4y^2 = 4$

   c) $2x^2 + 3y^2 = 5$

   d) $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$

   e) $16x^4 + y^4 = 32$

3. Encuentra el ángulo de intersección entre los siguientes pares de curvas:

   a) $y^2 = 4x;\ 2x^2 + 5y = 12$

   b) $x^2 - 4x + y^2;\ x^2 + y^2 = 8$

   c) $y^2 = x^3;\ 2x^2 + 3y^2 = 5$

   d) $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0;\ x^2 + y^2 + 2x + y = 10$

   e) $4x^2 - y^2 = 8;\ 2y^2 + x^2 = 20$

4. Se tira una bomba en línea recta desde un avión a 800 pies sobre el nivel del suelo, la velocidad inicial es de 640 pies por segundo, ¿cuánto tiempo tarda en llegar al suelo y con qué velocidad lo hace? La ecuación de movimiento es $s = 800 - 640t - 16t^2$.

5. Un cohete se dispara en forma vertical desde el suelo y su ecuación de movimiento es $s = 128t - 16t^2$, con una velocidad de 128m/s; ¿cuánto tiempo requiere para alcanzar su máxima altura y cuál es dicha altura máxima?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Derivación de funciones trascendentes

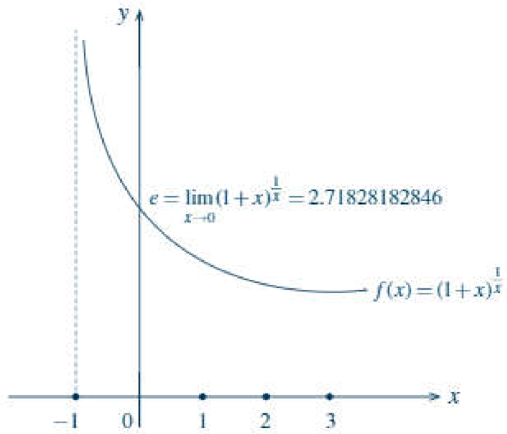
El número e y los logaritmos naturales

El límite que representa la definición del número e es:

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828182846$$

En la siguiente gráfica se muestra cómo la curva de $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ se acerca hacia e cuando x tiende a cero.

x	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	4	2.86	2.732	2.719	2.7184	e = 2.7182818	2.7181	2.716	2.70	2.59	2.25	2



Los logaritmos naturales o **neperianos** son los que tienen como base el número e, los logaritmos comunes tienen como base al número 10. Con el fin de distinguir los logaritmos naturales de los logaritmos comunes, sobre todo cuando la base no se indica explícitamente, utilizaremos la siguiente notación.

$$\ln u = \text{Logaritmo natural de } u \text{ (base } e)$$
$$\log u = \text{Logaritmo común de } u \text{ (base 10)}$$

Si x es el logaritmo natural de un número N, significa que x es el exponente al cual se debe elevar la base e para que el resultado sea N, es decir:

$$x = \ln N \text{ significa que } e^x = N$$

Si y es el logaritmo común de un número N, significa que y es el exponente al cual se debe elevar la base e para que el resultado sea N, es decir:

$$y = \log N \text{ significa que } 10^y = N$$

Ejemplos

a) Si $x = 0$, tenemos:

$e^x = N$	$x = \ln N$	
$e^0 = 1$, significa que	$0 = \ln 1$	$\therefore \ \ln 1 = 0$

b) Si $x = 1$, tenemos:

$e^x = N$	$x = \ln N$	
$e^1 = e$, significa que	$1 = \ln e$	$\therefore \ \ln e = 1$

c) Si $y = 0$, tenemos:

$10^y = N$	$y = \log N$	
$10^0 = 1$, significa que	$0 = \log 1$	$\therefore \ \ln 1 = 0$

d) Si $y = 1$, tenemos:

$10^y = N$	$y = \log N$	
$10^1 = 1$, significa que	$1 = \log 10$	$\therefore \ \log 10 = 1$

Relación entre el logaritmo natural y el logaritmo común

Si en la ecuación $e^x = N$ se toman logaritmos comunes en ambos miembros y se aplican las propiedades de los logaritmos, se tiene que:

$$e = N$$

$$\log \ e^x = \log \ N$$

$$x \log e = \log \ N$$

Despejando x, resulta:

$$x = \frac{\log \ N}{\log \ e}$$

Si $x = \ln N$, al sustituir en la ecuación anterior, se tiene que:

$$\ln \ N = \frac{\log \ N}{\log \ e} \text{ que se lee como:}$$

El logaritmo natural de un número cualquiera se determina al dividir su logaritmo común entre el logaritmo e.

Si de la ecuación $\ln \ N = \dfrac{\log \ N}{\log \ e}$ despejamos para el logaritmo común, resulta:

$$\log N = \ln N \log e \text{ que se lee como:}$$

El logaritmo común de un número cualquiera se determina multiplicando su logaritmo natural por el logaritmo común de e.

Ejemplos

Si $\log e = 0.4343$ y $\dfrac{1}{\log\, e} = 2.303$, aplicar en las siguientes demostraciones:

a) Determina el logaritmo natural de 8.

Datos	Fórmula	Sustitución
$N = 8$	$\ln N = \dfrac{\log N}{\log\, e}$ o $\ln N = 2.303 \log N$	$\ln (8) = 2.303 \log (8)$ $\ln (8) = 2.303\ (0.9030)$ $\therefore\ \ln (8) = 2.079609$

b) Calcula el logaritmo natural de 25.

Datos	Fórmula	Sustitución
$N = 25$	$\ln N = 2.303 \log N$	$\ln (25) = 2.303 \log (25)$ $\ln (25) = 2.303(1.3979)$ $\therefore\ \ln (25) = 3.2193637$

c) Encuentra el logaritmo común de 324.

Datos	Fórmula	Sustitución
$N = 324$	$\log N = \ln N \log e$ o $\log N = 0.4343 \ln$	$\log (324) = 0.4343 \ln (324)$ $\log (324) = 0.4343\ (5.7807)$ $\therefore\ \log (324) = 2.510055801$

d) Determina el logaritmo común 5372.

Datos	Fórmula	Sustitución
$N = 5372$	$\log N = 0.4343 \ln N$	$\log (5372) = 0.4343 \ln (5372)$ $\log (5372) = 0.4343\ (8.5889)$ $\therefore\ \log (5372) = 3.73015927$

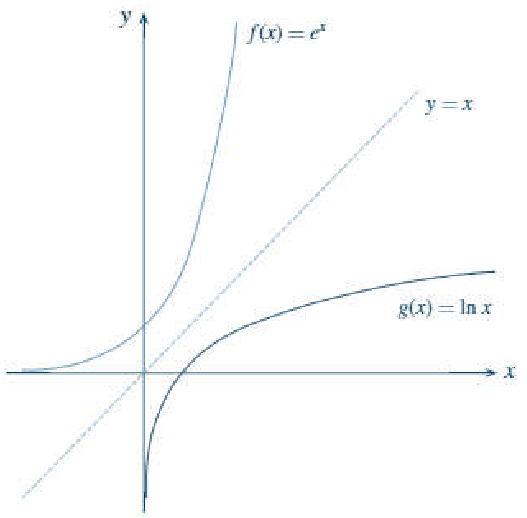
Análisis gráfico de las funciones logarítmicas y exponenciales

En el cálculo avanzado se establece que si una función continua es siempre creciente o siempre decreciente, entonces tiene una función inversa.

La función que se define por $y = e^x$, se denomina **función exponencial**; con base en la definición de logaritmo natural la inversa de la ecuación exponencial es: $x = \ln y$.

Las funciones e^x y $\ln y$ tienen el comportamiento de funciones inversas entre sí; si permutamos x y y de la ecuación $x = \ln y$, resultando $y = \ln x$, la que se define como función logarítmica.

Representando gráficamente las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x = f^{-1}(x)$ se observará que son inversas una de la otra al reflejarse entre sí en la recta $y = x$.

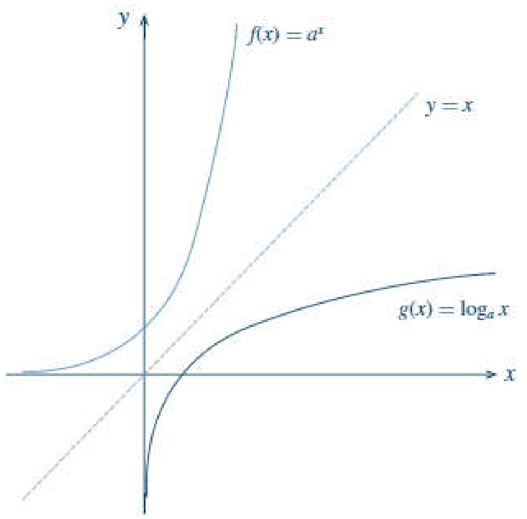


Ambas funciones son crecientes y son continuas en sus respectivos dominios.

La función que se define por $y = a^x$, se denomina **función exponencial**; extendiendo la definición de logaritmo común, la ecuación exponencial es inversa de la ecuación en: $x = \log_a y$.

Las funciones a^x y log y tienen el comportamiento de funciones inversas, si permutamos x y y de la ecuación $x = \log_a y$, resulta $y = \log_a x$, que se denomina función logarítmica.

Representando gráficamente las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log x_a = f^{-1}(x)$ se observará que son inversas una de la otra al reflejarse entre sí en la recta $y = x$.



Ambas funciones son crecientes y son continuas en sus respectivos dominios.

Fórmulas fundamentales de derivación para funciones logarítmicas y exponenciales

Al considerar la derivada de las funciones logarítmicas y exponenciales, se debe tener presente que la derivada de una función algebraica es siempre algebraica, mientras que la derivada de una función trascendente no siempre es trascendente.

La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividida entre la función, es decir, es igual a la derivada de la función multiplicada por su recíproca.

$$\frac{d}{dx}(\ln v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v}=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} \quad \Bigg\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 12.}$$

Demostración:

Si $y=\ln v$, derivado por la regla general, tenemos;

$$y+\Delta y=\ln(v+\Delta v) \quad \Big\} \text{ Primer paso}$$

$$\left.\begin{aligned} y+\Delta y &= \ln(v+\Delta v) \\ -y &= -\ln v \end{aligned}\right\} \text{ Segundo paso}$$

$$\Delta y=\ln(v+\Delta v)-\ln v \quad \Big\} \text{ Al aplicar las propiedades de los logaritmos, resulta:}$$

$$\Delta y=\ln\left(\frac{v+\Delta v}{v}\right)=\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{1}{\Delta v}\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right) \quad \Bigg\} \text{ Al multiplicar por } \frac{v}{v}\text{, se tiene:}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\left(\frac{v}{v}\right)\left(\frac{1}{\Delta v}\right)\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)=\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{v}{\Delta v}\right)\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right) \quad \Bigg\} \text{ Por las propiedades de los logaritmos resulta:}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}$$

Por la definición del número e, se tiene que:

$$\lim_{\Delta v\to 0}\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \text{ donde } x=\frac{\Delta v}{v}$$

Luego $\lim_{\Delta v\to 0}\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}=\ln(e)=1$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dv}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{1}{v}\ \ln e=\frac{1}{v} \quad \Bigg\} \text{ Cuarto paso}$$

Si además se tiene que v es función de x, entonces de acuerdo con la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Al sustituir el valor de $\frac{dy}{dv}$ en la regla de la cadena, resulta:

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\ln\ v)=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\qquad \text{L.C.D.D.}$$

Si $v=x$, la fórmula anterior se simplifica, lo que resulta:

$$\left.\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}\quad\right\}\ \text{Fórmula fundamental de derivación número } 12a.$$

Como $\ln\ v=\frac{\log v}{\log\ e}$ al sustituír en la fórmula de derivación para logaritmo natural, resultando:

$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{\log v}{\log\ e}\right)=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\quad\right\}\ \text{Despejando } \log v\text{, tenemos:}$$

$$\left.\frac{d}{dx}(\log v)=\frac{\log\ \boldsymbol{e}}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\quad\right\}\ \text{Fórmula fundamental de derivación número 13.}$$

La fórmula anterior indica que la derivada del logaritmo común de una función es igual al logaritmo común de e dividido entre la función y multiplicada por la derivada de la función.

Si $v=x$, la fórmula anterior se simplifica y se obtiene:

$$\left.\frac{d}{dx}(\log\ x)=\frac{\log\ e}{x}\quad\right\}\ \text{Fórmula fundamental de derivación número } 13a.$$

La fórmula anterior indica que la derivada del logaritmo común de una variable es igual al logaritmo común de e dividido entre la variable.

Si $y=a^v$, como función exponencial y tomando logaritmos naturales en ambos miembros, tenemos que:

$$\ln\ y=\ln(a^v)=v\ \ln\ a$$

Al derivar ambos miembros con respecto a v, resulta:

$$\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dv}=\ln\ a$$

Al despejar $\frac{dy}{dv}$ se tiene:

$$\frac{dy}{dv}=y\ \ln a$$

Es decir,

$$\frac{dy}{dv}=a^v\ \ln a$$

Al sustituir el valor de $\frac{dy}{dv}$ en la regla de la cadena se tiene:

$$\left.\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}\right\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 14.}$$

La fórmula anterior indica que la derivada de una constante que tiene por exponente a una función es igual al producto de la constante elevada a la función por el logaritmo natural de la constante y por la derivada de la función.

Si $v = x$, la fórmula anterior se simplifica para obtener una versión corta de la fórmula 14:

$$\left.\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \right\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 14a.}$$

También si $a = e$ y como el $\ln e = 1$, al sustituir en la fórmula de derivación 14 para función exponencial, resulta:

$$\left.\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}\right\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 15.}$$

La fórmula anterior indica que la derivada de la constante e elevada a un exponente que sea función de una variable es igual al producto de la constante e elevada a la función por la derivada de la función.

Si $v = x$, la fórmula anterior se simplifica para obtener una versión corta de la fórmula 15:

$$\left.\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \right\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número } 15a.$$

La fórmula anterior indica que la derivada de la constante e elevada a un exponente variable es igual a e elevada al exponente variable.

Fórmula de derivación de la función exponencial general

La derivada de una función con un exponente variable es igual a la suma de los dos resultados que se obtienen derivando en primer lugar de acuerdo a la fórmula fundamental número **6**, considerando el exponente como una constante, y después derivando de acuerdo a la fórmula fundamental número **14**, considerando a la función base como una constante. Es decir,

$$\left.\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}\right\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 16.}$$

Demostración: Si $y = u^v$ como función exponencial general y tomando logaritmos naturales en ambos miembros, tenemos que: $\ln y = \ln (u^v) = v \ln u$

Si $e^x = N$ y $x = \ln N$, al aplicarlo en la ecuación anterior resulta:

$$\left. y = e^{v \ln u} \right\} \text{ Al derivar se tiene que}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx}(v \ln u)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{v \ln u} \left[v\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dx}\right) + \ln u \frac{dv}{dx}\right]$$

Si $y = e^{v \ln u}$ y a su vez $y = u^v$, al sustituir en la expresión anterior, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(u^v) = u^v \left[v\left(\frac{1}{u}\ \frac{du}{dx}\right) + \ln\ u\ \frac{dv}{dx} \right]$$

$$\frac{d}{dx}(u^v) = v\frac{u^v}{u}\ \frac{du}{dx} + u^v\ \ln u\ \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(u^v) = v\ u^{v-1}\ \frac{du}{dx} + u^v\ \ln u\ \frac{dv}{dx} \qquad \text{L.C.D.D}$$

Si $v = n$, una constante cualquiera, la fórmula anterior se simplifica, es decir:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = n\ u^{n-1}\frac{du}{dx} + u^n\ \ln n\frac{dn}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(u^n) = n\ u^{n-1}\frac{du}{dx} \quad \left.\right\} \text{ Demostración de la fórmula fundamental de derivación número 6 para un valor cualquiera de } n.$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Deriva la siguiente función $y = \ln(1 + x^2)$.

$$y = \ln(1+x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}[\ln(1+x^2)]$$

$$y' = \frac{1}{(1+x^2)}\ \frac{d}{dx}(1+x^2) = \frac{1}{(1+x^2)}(2x^{2-1})$$

$$\therefore\ y' = \frac{2x}{1+x^2}$$

2 Deriva la siguiente función $y = \ln\sqrt{a^2 - x^2}$.

$$y = \ln\ \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{a^2-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\left[\frac{\frac{d}{dx}(a^2-x^2)}{2(a^2-x^2)^{\frac{2-1}{2}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\left[\frac{-2x^{2-1}}{2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

$$\therefore\ y' = -\frac{x}{(a^2-x^2)}$$

3 Deriva la siguiente función $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\right)$$

$$y'=\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)}{2\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^{\frac{2-1}{2}}}\right]=\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}}\left[\frac{\frac{(1-2x)\frac{d}{dx}(1+2x)-(1-2x)\frac{d}{dx}(1+2x)}{(1+2x)}}{2\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$y'=\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}}\left[\frac{\frac{(1-2x)(2)-(1+2x)(-2)}{(1-2x)^2}}{2\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}}\right]=\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}}\left[\frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}(2-\cancel{4x}+2+\cancel{4x})}{2(1-2x)^2(1+2x)}\right]$$

$$y'=\frac{\cancel{(1+2x)}(4)}{2(1-2x)^{\cancel{2}}(1+2x)}=\frac{2}{(1-2x)(1+2x)}\quad\therefore\; y'=\frac{2}{1-4x^2}$$

4 Deriva la siguiente función $y=x^2\ln x^2$.

$$y=x^2\ln x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}(x^2\ln x^2)=x^2\frac{d}{dx}+(\ln x^2)\frac{d}{dx}(x^2)=x^2\left(\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)\frac{d}{dx}(x^2)+(\ln x^2)(2x^{2-1})$$

$$y'=2x^{2-1}+2x\ln x^2=2x+2x\ln x^2$$

$$\therefore\; y'=2x(1+2\ln x)$$

5 Deriva la siguiente función $y=\frac{\ln ax}{ax}$.

$$y=\frac{\ln ax}{ax}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln ax}{ax}\right)=\frac{ax\frac{d}{dx}(\ln ax)-(\ln ax)\frac{d}{dx}(ax)}{(ax)^2}$$

$$y'=\frac{\cancel{ax}\left(\frac{1}{\cancel{ax}}\right)\frac{d}{dx}(ax)-(\ln ax)(a)}{a^2x^2}=\frac{a-a\ln ax}{a^2x^2}=\frac{\cancel{a}(1-\ln ax)}{a^{\cancel{2}}x^2}$$

$$\therefore\; y'=\frac{1-\ln ax}{ax^2}$$

6 Deriva la siguiente función $y = \ln^5 x^2$.

$$y = \ln^5 x^2 = (\ln\ x^2)^5$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}[(\ln\ x^2)^5] = 5(\ln\ x^2)^{5-1}\frac{d}{dx}(\ln\ x^2)$$
$$y' = 5(\ln\ x^2)^4\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{d}{dx}(x^2) = 5(\ln x^2)^4\left(\frac{1}{x^2}\right)(2x^{2-1})$$
$$y' = \frac{10\cancel{x}(\ln\ x^2)^4}{\cancel{x^2}}$$
$$\therefore\ \ y' = \frac{10(\ln^4\ x^2)}{x}$$

7 Deriva la siguiente función $y = \log(x^2 - 4)$.

$$y = \log(x^2 - 4)$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\log(x^2-4) = \frac{\log\ e}{x^2-4}\frac{d}{dx}(x^2-4) = \frac{\log\ e}{x^2-4}(2x^{2-1})$$
$$\therefore\ \ y' = \frac{2x\log\ e}{x^2-4}$$

8 Deriva la siguiente función $y = \log\sqrt{16-2x^2}$.

$$y = \log\sqrt{16-2x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(\log\ \sqrt{16-2x^2}) = \frac{\log\ e}{\sqrt{16-2x^2}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{16-2x^2}\right)$$
$$y' = \frac{\log\ e}{\sqrt{16-2x^2}}\left[\frac{\frac{d}{dx}(16-2x^2)}{2(16-2x^2)^{\frac{2-1}{2}}}\right] = \frac{\log\ e}{\sqrt{16-2x^2}}\left[\frac{-\cancel{2}(2x^{2-1})}{\cancel{2}(16-2x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$y' = \frac{\log\ e}{\sqrt{16-2x^2}}\left(\frac{-2x}{\sqrt{16-2x^2}}\right)\ \therefore\ y' = -\frac{2x\log\ e}{16-2x^2}$$

9 Deriva la siguiente función $y=\log\left(\dfrac{ax}{b^2+x^2}\right)$.

$$y=\log\left(\frac{ax}{b^2+x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left[\log\left(\frac{ax}{b^2+x^2}\right)\right]=\frac{\log e}{\left(\dfrac{ax}{b^2+x^2}\right)}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{ax}{b^2+x^2}\right)$$

$$y'=\frac{(b^2+x^2)(\log e)}{ax}\left[\frac{(b^2+x^2)\dfrac{dy}{dx}(ax)-ax\dfrac{d}{dx}(b^2+x^2)}{(b^2+x^2)^2}\right]$$

$$y'=\frac{(b^2+x^2)(\log e)}{ax}\left[\frac{(b^2+x^2)(a)-ax(2x^{2-1})}{(b^2+x^2)^2}\right]$$

$$y'=\frac{(b^2+x^2)(\log e)}{ax}\left[\frac{ab^2+ax^2-2ax^2}{(b^2+x^2)^2}\right]$$

$$y'=\frac{\cancel{(b^2+x^2)}(\log e)(ab^2-ax^2)}{ax(b^2+x^2)^{\cancel{2}}}=\frac{\cancel{a}(b^2-x^2)\log e}{\cancel{a}x(b^2+x^2)^2}=\frac{(b^2-x^2)\log e}{x(b^2+x^2)}$$

10 Deriva la siguiente función $y=x\log(1-x)$.

$$y=x\ \log(1-x)$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}[x\ \log(1-x)]=x\frac{d}{dx}[\log(1-x)]+\log(1-x)\frac{d}{dx}(x)$$

$$y'=x\left(\frac{\log e}{1-x}\right)\frac{d}{dx}(1-x)+\log(1-x)=\frac{x\ \log e}{(1-x)}(-1)+\log(1-x)$$

$$\therefore\ y'=-\frac{x\ \log e}{(1-x)}+\log(1-x)$$

11 Deriva la siguiente función $y=a^{5x^3}$.

$$y=a^{5x^3}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}(a^{5x^3})\ a^{5x^3}=(\ln\ a)\frac{d}{dx}(5x^3)=a^{5x^3}(\ln a)[5(3x^{3-1})]$$

$$\therefore\ y'=15x^2\ a^{5x^3}\ \ln a$$

12 Deriva la siguiente función: $y=10^{-3x}$

$$y=10^{-3x}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}(10^{-3x})=10^{-3x}(\ln\ 10)\frac{d}{dx}(-3x)=10^{-3x}(\ln\ 10)(-3)$$

$$\therefore\ y'=-\frac{3\ln 10}{10^{3x}}$$

13 ••Deriva la siguiente función $y=5^{\sqrt{x}}$.

$$y=5^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(5^{\sqrt{x}}\right)5^{\sqrt{x}}(\ln 5)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=5^{\sqrt{x}}(\ln 5)\left[\frac{\frac{d}{dx}(x)}{2(x)^{\frac{2-1}{2}}}\right]$$

$$y'=5^{\sqrt{x}}(\ln 5)\left[\frac{1}{2(x)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\therefore\ y'=\frac{5^{\sqrt{x}}\ln 5}{2\sqrt{x}}$$

14 ••Deriva la siguiente función $y=ae^{(x^2-2)}$.

$$y=ae^{(x^2-2)}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left[ae^{(x^2-2)}\right]=a\frac{d}{dx}\left[e^{(x^2-2)}\right]\frac{d}{dx}(x^2-2)=ae^{(x^2-2)}(2x^{2-1})$$

$$\therefore\ y'=2axe^{(x^2-2)}$$

15 ••Deriva la siguiente función $y=e^{\sqrt{x}}$.

$$y=e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right)=e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\left[\frac{\frac{d}{dx}(x)}{2(x)^{\frac{2-1}{2}}}\right]=e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2(x)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\therefore\ y'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

16 ••Deriva la siguiente función $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^2+e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^2+e^{-x}}\right)=\frac{(e^x+e^{-x})\frac{d}{dx}(e^x-e^{-x})-(e^x-e^{-x})\frac{d}{dx}(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$y'=\frac{(e^x+e^{-x})\left[e^x\frac{d}{dx}(x)-e^x\frac{d}{dx}(-x)\right]-(e^x-e^{-x})\left[e^x\frac{d}{dx}(x)+e^{-x}\frac{d}{dx}(-x)\right]}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$y'=\frac{(e^x+e^{-x})\left[e^x-e^{-x}(-1)\right]-(e^x-e^{-x})\left[e^x+e^{-x}(-1)\right]}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$y' = \frac{\cancel{e^{2x}} + e^{x-x} + e^{-x+x} + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + e^{x-x} + e^{-x+x} - \cancel{e^{-2x}}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^0 + e^0 + e^0 + e^0}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{1+1+1+1}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

17 ●•·Deriva la siguiente función $y = e^{\ln x}$.

$$y = e^{\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(e^{\ln x}) = e^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = e^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \quad y' = \frac{e^{\ln x}}{x}$$

18 ●•·Deriva la siguiente función $y = (ae)^{nx}$.

$$y = (ae)^{nx} = a^{nx}e^{nx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(a^{nx}e^{nx}) = (a^{nx})\frac{d}{dx}(e^{nx}) + (e^{nx})\frac{d}{dx}(a^{nx})$$

$$y' = a^{nx}e^{nx}\frac{d}{dx}(nx) + e^{nx}a^{nx}(\ln a)\frac{d}{dx}(nx)$$

$$y' = na^{nx}e^{nx} + ne^{nx}a^{nx}(\ln a) = na^{nx}e^{nx}(1 + \ln a)$$

$$\therefore \quad y' = n(ae)^{nx}(1 + \ln a) = ny(1 + \ln a)$$

19 ●•·Deriva la siguiente función $y = e^x \ln x$.

$$y = e^x \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(e^x \ln x) = e^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$y' = e^x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(e^x)$$

$$\therefore \quad y' = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

20 ●•· Deriva la siguiente función $y = a^x \log x$.

$$y = a^x \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(a^x \log x) = a^x\frac{d}{dx}(\log x) + (\log x)\frac{d}{dx}(a^x)$$

$$y' = a^x\left(\frac{\log e}{x}\right) + (\log x)(a^x \ln a)$$

$$\therefore \quad y' = a^x\left(\frac{\log e}{x} + (\log x)\ln a\right)$$

21 Deriva la siguiente función $y = xe^{x^2}$.

$$y = x^{e^{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(x^{e^{x^2}}\right) = e^{x^2} x^{e^{x^2}-1}\frac{d}{dx}(x) + x^{e^{x^2}}(\ln\, x)\frac{d}{dx}(e^{x^2})$$

$$y' = e^{x^2} x^{e^{x^2}-1} + x^{e^{x^2}}\ \ln\ x(e^{x^2})\frac{d}{dx}(x^2) = e^{x^2}\frac{x^{e^{x^2}}}{x} + x^{e^{x^2}}\ \ln\ x(e^{x^2})(2x^{2-1})$$

$$y' = \frac{e^{x^2} x^{e^{x^2}}}{x} + 2xe^{x^2}\ \ln x = e^{x^2} x^{e^{x^2}}\left(\frac{1}{x} + 2x\ \ln x\right)$$

$$\therefore\quad y' = e^{x^2} x^{e^{x^2}}\left(\frac{1}{x} + 2x\ \ln x\right)$$

22 Deriva la siguiente función $y = x^{\ln x}$.

$$y = x^{\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(x^{\ln x}) = (\ln x)\, x^{\ln x - 1}\frac{d}{dx}(x) + x^{\ln x}(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$y' = \ln x\ \left(x^{\ln x - 1}\right) + x^{\ln x}(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = (\ln x)\frac{x^{\ln x}}{x} + \frac{x^{\ln x}}{x}(\ln x)$$

$$\therefore\quad y' = \frac{2x^{\ln x}}{x}(\ln x) = \frac{2x^{\ln x}}{x}\ln x$$

23 Deriva la siguiente función $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$.

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x}\right)^x = x\left(\frac{a}{x}\right)^{x-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x}\right) + \left(\frac{a}{x}\right)^x \ln\left(\frac{a}{x}\right)\frac{d}{dx}(x)$$

$$y' = x\left(\frac{a}{x}\right)^{x-1}\left(-\frac{a}{x^2}\right) + \left(\frac{a}{x}\right)^x \ln\left(\frac{a}{x}\right) = \left(-\frac{a\cancel{x}}{\cancel{x^2}}\right)\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^x}{\left(\frac{a}{x}\right)} + \left(\frac{a}{x}\right)^x \ln\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$y' = \left(-\frac{\cancel{a}}{\cancel{x}}\right)\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^x}{\left(\frac{\cancel{a}}{\cancel{x}}\right)} + \left(\frac{a}{x}\right)^x \ln\left(\frac{a}{x}\right) = -\left(\frac{a}{x}\right)^x + \left(\frac{a}{x}\right)^x \ln\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$\therefore\quad y' = \left(\frac{a}{x}\right)^x\left[-1 + \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right] = \left(\frac{a}{x}\right)^x\left[\ln\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right]$$

Derivación logarítmica

A veces es conveniente apoyarnos en las propiedades de los logaritmos para simplificar el procedimiento de derivación en funciones logarítmicas, en funciones exponenciales y en funciones que constan de varios factores o que presentan complejidad algebraica.

Ejemplos

I. Utilizando la derivación logarítmica, determina la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = \ln\sqrt{4-x^2}$

Solución por fórmula

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ \frac{d}{dx}\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\left[\frac{\frac{d}{dx}(4-x^2)}{2(4-x^2)^{\frac{2-1}{2}}}\right]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\left[\frac{-\cancel{2}x^{2-1}}{\cancel{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\therefore\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Solución por derivación logarítmica

$$y = \ln\sqrt{4-x^2} = \ln(4-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(4-x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ \ln(4-x^2)\right] = \frac{1}{2}\ \frac{d}{dx}[\ln(4-x^2)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)\frac{d}{dx}(4-x^2)$$

$$y' = \frac{1}{2(4-x^2)}(-2x^{2-1}) = \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{2}(4-x^2)}$$

$$\therefore\quad y' = -\frac{x}{(4-x^2)}$$

2. $y = \log\left(\frac{3x}{5+x^2}\right)$

$$y = \log\ 3x - \log(5+x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(\log\ 3x) - \frac{d}{dx}[\log(5+x^2)] = \left(\frac{\log\ e}{3x}\right)\frac{d}{dx}(3x) - \left(\frac{\log\ e}{(5+x^2)}\right)\frac{d}{dx}(5+x^2)$$

$$y' = \frac{\cancel{3}\log\ e}{\cancel{3}x} - \frac{\log\ e(2x^{2-1})}{(5+x^2)} = \frac{\log\ e}{x} - \frac{2x\log\ e}{(5+x^2)}$$

$$y' = \log\ e\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{5+x^2}\right) = \log e\left[\frac{5+x^2-2x^2}{x(5+x^2)}\right]$$

$$\therefore\quad y' = \log\ e\left[\frac{5-x^2}{x(5+x^2)}\right]$$

Nota: los siguientes ejemplos se trabajan utilizando derivación logarítmica. El alumno deberá comprobar el resultado, por medio de la derivación por fórmula directa en todos los ejercicios.

3. $y = \ln\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$

$$y = \ln\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right) = \frac{1}{2}[\ln(a^2+x^2) - \ln(a^2-x^2)]$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}[\ln(a^2+x^2) - \ln(a^2-x^2)]\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}[\ln(a^2+x^2)] - \frac{d}{dx}[\ln(a^2-x^2)]\right]$$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a^2+x^2)}\frac{d}{dx}(a^2+x^2) - \frac{1}{(a^2-x^2)}\frac{d}{dx}(a^2-x^2)\right]$$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a^2+x^2)}(2x^{2-1}) - \frac{1}{(a^2-x^2)}(-2x^{2-1})\right]$$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{(a^2+x^2)} + \frac{2x}{(a^2-x^2)}\right] = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)} + \frac{x}{(a^2-x^2)}\right]$$

$$y' = \frac{x(a^2-x^2) + x(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)(a^2-x^2)}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{a^2x - \cancel{x^3} + a^2x + \cancel{x^3}}{(a^2+x^2)(a^2-x^2)} = \frac{2a^2x}{a^4-x^4}$$

4. $y = x^x$ $\Big\}$ Se recomienda tomar logaritmos naturales en ambos miembros de la función y después derivar.

$$\ln y = \ln x^2 = x\ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x\ln y)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x) = \cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right) + \ln x = 1 + \ln x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y(1+\ln x) = x^2(1+\ln x)$$

5 $y = a^{2x}$

$$\ln y = \ln a^{2x} = 2x\ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(2x\ln a)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x\frac{d}{dx}(\ln a) + \ln a\frac{d}{dx}(2x) = 2x(0) + \ln a(2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\,(2\ln a) = 2a^{2x}\ln a$$

6. $y = (2-x)^{1+x}$

$$\ln\ y = \ln\ (2-x)^{1+x} = (1+x)\ln\ (2-x)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln\ y) = \frac{d}{dx}[(1+x)\ln\ (2-x)]$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{d}{dx} = (1+x)\frac{d}{dx}[\ln\ (2-x)] + \ln\ (2-x)\frac{d}{dx}(1+x)$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = (1+x)\left[\frac{1}{(2-x)}\ \frac{d}{dx}(2-x)\right] + \ln\ (2-x)(1) = \frac{(1+x)(-1)}{(2-x)} + \ln\ (2-x)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = y\left[\ln\ (2-x) - \frac{(1+x)}{(2-x)}\right] = (2-x)^{1+x}\left[\ln\ (2-x) - \frac{(1+x)}{(2-x)}\right]$$

7. $y = \dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}$

$$\ln\ y = \ln\left[\frac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}\right] = \ln\ x^2\sqrt{3x-2} - \ln\ (x-1)^2$$

$$\ln\ y = \ln\ x^2 + \ln\ (3x-2)^{\frac{1}{2}} - 2\ln\ (x-1)$$

$$\ln\ y = 2\ln\ x + \frac{1}{2}\ln\ (3x-2) - 2\ln\ (x-1)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(2\ln\ x) + \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ln\ (3x-2)\right] - \frac{d}{dx}[2\ln\ (x-1)]$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dx}(\ln\ x) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\ln\ (3x-2)] - 2\frac{d}{dx}[\ln\ (x-1)]$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(3x-2)}\ \frac{d}{dx}(3x-2)\right] - 2\left[\frac{1}{(x-1)}\ \frac{d}{dx}(x-1)\right]$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{3}{2(3x-2)} - \frac{2}{(x-1)} = \frac{[(2)(3x-2)(x-1)] + 3x(x-1) - 2[2x(3x-2)]}{2x(3x-2)(x-1)}$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = \frac{4(3x^2-3x-2x+2) + 3x^2 - 3x - 12x^2 + 8x}{2x(3x-2)(x-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cancel{12x^2} - 12x \cancel{-8x} + 8 + 3x^2 - 3x - \cancel{12x^2} + \cancel{8x}}{2x(3x-2)(x-1)}\right] = y\left[\frac{3x^2-15x+8}{2x(3x-2)(x+1)}\right]$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2\cancel{\sqrt{3x-2}}}{(x-1)^2}\ \left[\frac{3x^2-15x+8}{2x\cancel{(3x-2)}(x-1)}\right] = \frac{x(3x^2-15x+8)}{2\sqrt{3x-2}\ (x-1)^3}$$

Fórmulas fundamentales de derivación para funciones trigonométricas directas

A continuación se ilustran los procedimientos para deducir las fórmulas fundamentales de derivación para funciones trigonométricas directas.

1. La derivada de la función seno de una función es igual al producto del coseno de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } v) = \cos\ v\frac{dv}{dx} \quad \Big\}\ \text{Fórmula fundamental de derivación número 17.}$$

Demostración. Si $y = \text{sen } v$, derivando por la regla general, resulta:

$$y + \Delta y = \text{sen } (v + \Delta v)$$

Al utilizar la identidad trigonométrica del seno de la suma de dos ángulos se tiene:

$$\text{sen } (v + \Delta v) = \text{sen } v \cos \Delta v + \Delta v \cos v, \text{ resulta}$$

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \text{sen } v \cos \Delta v + \text{sen } \Delta v \cos v \\ -y &= -\text{sen } v \\ \hline \Delta y &= \text{sen } v \cos \Delta v + \text{sen } \Delta v \cos v - \text{sen } v \ \} \text{ Al factorizar, se tiene que:} \\ \Delta y &= \cos v \text{ sen } \Delta v - \text{sen } v(1 - \cos \Delta v) \\ \frac{\Delta y}{\Delta v} &= \cos\ v\left(\frac{\text{sen } \Delta v}{\Delta v}\right) - \text{sen } v\left(\frac{1-\cos \Delta v}{\Delta v}\right) \end{aligned}$$

Como el $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\text{sen } \Delta v}{\Delta v} = 1$ y el $\lim\limits_{\Delta v \to 0}\left(\dfrac{1-\cos \Delta v}{\Delta v}\right) = 0$

Se tiene que: $\dfrac{\Delta y}{\Delta v} = \cos\ v(1) - \text{sen } v(0)$

$$\Delta v \to 0$$

$$\therefore \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{dy}{dv} = \cos v$$

Al sustituir el valor de $\dfrac{dy}{dx}$ en la regla de la cadena resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos v \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{sen } v) = \cos v \frac{dv}{dx} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

2. La derivada de la función coseno es igual a menos el producto del seno de la función por la derivada de la función.

$$\left.\frac{d}{dx}\cos v = -\text{sen } v\frac{dv}{dx}\right\}\quad \text{Fórmula fundamental de derivación número 18.}$$

Demostración. Si $y = \cos v$, al utilizar la identidad trigonométrica $\cos v = \text{sen }(90^\circ - v)$ se tiene:

$$y = \text{sen }(90^\circ - v)$$

Al derivar por la fórmula fundamental de derivación número 17 se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\text{sen }(90^\circ - v)] = \cos(90^\circ - v)\frac{d}{dx}(90^\circ - v) = \cos(90^\circ - v)\left(-\frac{dv}{dx}\right)$$

Mediante la identidad trigonométrica, $\cos(90^\circ - v) = \text{sen } v$ resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \text{sen } v\left(-\frac{dv}{dx}\right) = -\text{sen } v\frac{dv}{dx} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

3. La derivada de la función tangente de una variable es igual al producto de la función secante cuadrada de la variable por la derivada de la variable.

$$\left.\frac{d}{dx}(\tan v) = \sec^2 v\ \frac{dv}{dx}\right\}\quad \text{Fórmula fundamental de derivación número 19.}$$

Demostración. Si $y = \tan v$, con ayuda de la identidad trigonométrica $\tan v = \dfrac{\text{sen } v}{\cos\ v}$ se tiene:

$$y = \frac{\text{sen } v}{\cos v}$$

Derivando por la fórmula fundamental de derivación número 7 se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos v\dfrac{d}{dx}(\text{sen } v) - \text{sen} v\dfrac{d}{dx}(\cos v)}{(\cos v)^2} = \frac{\cos v\left(\cos v\dfrac{dv}{dx}\right) - \text{sen } v\left(-\text{sen} v\dfrac{d}{dx}\right)}{\cos^2 v}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 v\dfrac{dv}{dx} + \text{sen}^2 v\dfrac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \frac{\dfrac{dv}{dx}\left(\cos^2 v - \text{sen}^2 v\right)}{\cos^2 v}$$

Mediante identidades trigonométricas, $\text{sen}^2 v + \cos^2 v = 1$ y por $\sec^2 v = \dfrac{1}{\cos^2 v} v$ se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dv}{dx}(1)}{\cos^2 v} = \sec^2 v\ \frac{dv}{dx} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

4. La derivada de la cotangente de una función es igual a menos el producto de la cosecante de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}=(\cot v)=-\csc^2 v\frac{dv}{dx} \quad \Big\}$$ Fórmula fundamental de derivación número 20.

Demostración. Si $y=\cot v$, al hacer uso de la identidad trigonométrica $\cot v=\dfrac{1}{\tan v}$ se tiene:

$$y=\frac{1}{\tan v}$$

Al derivar por la fórmula fundamental de derivación número 7*b* se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{1}{\tan^2 v}\right)\frac{d}{dx}(\tan v)=\left(-\frac{1}{\tan^2 v}\right)(\sec^2 v)\frac{dv}{dx}=\left(-\frac{\sec^2 v}{\tan^2 v}\right)\frac{dv}{dx}$$

Mediante identidades trigonométricas, $\sec^2 v=\dfrac{1}{\cos^2 v}$, $\tan^2 v=\dfrac{\operatorname{sen}^2 v}{\cos^2 v}$ y también $\csc^2 v=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 v}$ se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{1}{\cancel{\cos^2 v}}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 v}{\cancel{\cos^2 v}}}\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 v}\frac{dv}{dx}=-\csc^2 v\frac{dv}{dx} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

5. La derivada de la secante de una función es igual al producto de las funciones secante de la función por la tangente de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(\sec v)=\sec v\tan v\frac{dv}{dx} \quad \Big\}$$ Fórmula fundamental de derivación número 21.

Demostración. Si $y=\sec v$, al hacer uso de la identidad trigonométrica $\sec v=\dfrac{1}{\cos v}$ se tiene:

$$y=\frac{1}{\cos v}$$

Al derivar por la fórmula fundamental de derivación número 7*b* se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{1}{\cos^2 v}\right)\frac{d}{dx}(\cos v)=\left(-\frac{1}{\cos^2 v}\right)(-\operatorname{sen} v)\frac{dv}{dx}=\frac{\operatorname{sen} v}{\cos^2 v}\frac{dv}{dx}$$

Mediante identidades trigonométricas, $\sec v=\dfrac{1}{\cos v}$ y $\tan v=\dfrac{\operatorname{sen} v}{\cos v}$ se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v\ \cos v}\frac{dv}{dx}=\sec v\tan v\frac{dv}{dx} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

6. La derivada de la cosecante de una función es igual a menos el producto de las funciones cosecante de la función por la cotangente de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cot v \frac{dv}{dx} \quad \Bigg\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 22.}$$

Demostración. Si $y = \csc v$, al hacer uso de la identidad trigonométrica $\csc v = \frac{1}{\operatorname{sen} v}$ se tiene:

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} v}$$

Derivando por la fórmula fundamental de derivación número 7*b* se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 v}\right)\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) = \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 v}\right)(\cos v)\frac{dv}{dx} = -\frac{\cos v}{\operatorname{sen}^2 v}\frac{dv}{dx}$$

Mediante identidades trigonométricas, $\csc v = \frac{1}{\operatorname{sen} v}$ y $\cot v = \frac{\cos v}{\operatorname{sen} v}$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos v}{\operatorname{sen} v \operatorname{sen} v}\frac{dv}{dx} = -\csc v \cot v \frac{dv}{dx} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Deriva las siguientes funciones trigonométricas.

1. $y = \operatorname{sen} 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x^2) = \cos 3x^2 \frac{d}{dx}(3x^2)$$
$$\therefore\ y' = 6x \cos 3x^2$$

2. $y = \cos\sqrt{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right) = -\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$y' = -\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2}\left[\frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)}{2(1-x^2)^{\frac{2-1}{2}}}\right] = -\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2}\left[\frac{-\cancel{2}x^{2-1}}{\cancel{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\therefore\ y' = \frac{x \operatorname{sen}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y = \tan^3 4x = (\tan 4x)^3$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}[(\tan 4x)^2] = 3(\tan 4x)^{3-1}\frac{d}{dx}(\tan 4x)$$

$$y' = 3(\tan 4x)^2 \sec^2 4x \frac{d}{dx}(4x)$$

$$\therefore\ y' = 12\tan^2 4x(\sec^2 4x)$$

4. $y = 4\cot\frac{x}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(4\cot\frac{x}{4}\right) = 4\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{x}{4}\right) = 4\left(-\csc^2\frac{x}{4}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$y' = -\cancel{4}\csc^2\frac{x}{4}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\frac{dx}{dx}\right)$$

$$\therefore\ y' = -\csc^2\frac{x}{4}$$

5. $y = \sqrt{\sec\ 2x}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sec 2x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(\sec 2x)}{2(\sec 2x)^{\frac{2-1}{2}}} = \frac{\sec 2x\ \tan 2x\frac{d}{dx}(2x)}{2(\sec 2x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{\cancel{2}\cancel{\sec 2x}\ \tan 2x}{\cancel{2}\cancel{(\sec 2x)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\therefore\ y' = \sqrt{\sec\ 2x}\tan\ 2x$$

6. $y = a\csc bx$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(a\ \csc\ bx) = a\frac{d}{dx}(\csc\ bx) = a(-\csc bx\ \cot bx)\frac{d}{dx}(bx)$$

$$\therefore\ y' = -ab\ \csc\ bx\ \cot\ bx$$

7. $y = x\ \mathrm{sen}\ x$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(x\ \mathrm{sen}\ x) = x\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}\ x) + \mathrm{sen}\ x\frac{d}{dx}(x)$$

$$\therefore\ y' = x\ \cos\ x + \mathrm{sen}\ x$$

8. $y = \cot x + x$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(\cot x) + \frac{d}{dx}(x) = -\csc^2 x + 1 = -(\csc^2 x - 1)$$

Al usar la identidad trigonométrica $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$, se tiene:

$$y' = -\cot^2 x$$

9. $y=\dfrac{\cos 2x}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos\ 2x}{x}\right)=\frac{x\dfrac{d}{dx}(\cos\ 2x)-\cos\ 2x\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$y'=\frac{x(-\text{sen}\ 2x)\dfrac{d}{dx}(2x)-\cos\ 2x}{x^2}=\frac{-2x\ \text{sen}\ 2x-\cos\ 2x}{x^2}$$

$$\therefore\ \ y'=-\frac{2x\ \text{sen}\ 2x+\cos\ 2x}{x^2}$$

10. $y=\ln\sqrt{\tan ax}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\tan ax}\right)=\frac{1}{\sqrt{\tan ax}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\tan ax}\right)$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\tan ax}}\left[\frac{\dfrac{d}{dx}(\tan ax)}{2(\tan ax)^{\frac{2-1}{2}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\tan ax}}\left[\frac{\sec^2 ax\dfrac{d}{dx}(ax)}{2(\tan ax)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\therefore\ \ y'=\frac{a\ \sec^2 ax}{2\tan ax}=\frac{a}{2}\sec^2 ax\cot ax$$

11. $y=e^{-x}\,\text{sen}\,x$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}(e^{-x}\ \text{sen}\ x)=e^{-x}\frac{d}{dx}(\text{sen}\ x)+\text{sen}\ x\frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$y'=e^{-x}\cos\ x+\text{sen}\ x(e^{-x})\frac{d}{dx}(-x)=e^{-x}\cos\ x-e^{-x}\ \text{sen}\ x$$

$$\therefore\ \ y'=e^{-x}(\cos\ x-\text{sen}\ x)$$

12. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\frac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}}}\ \frac{d}{dx}\ \left(\sqrt{\frac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}}\right)$$

$$y'=\sqrt{\frac{1+\cos\ x}{1-\cos\ x}}\left|\frac{\dfrac{d}{dx}\ \left(\dfrac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}\right)}{2\left(\dfrac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}\right)^{\frac{2-1}{2}}}\right|$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\left[\frac{\dfrac{(1+\cos x)\dfrac{d}{dx}(1-\cos x)-(1-\cos x)\dfrac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}}{2\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\left[\frac{\dfrac{(1+\cos x)(\operatorname{sen} x)-(1-\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2}}{2\dfrac{(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}}{(1+\cos x)^{\frac{1}{2}}}}\right]$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\left[\frac{(1+\cos x)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{sen} x+\cancel{\operatorname{sen} x\cos x}+\operatorname{sen} x-\cancel{\operatorname{sen} x\cos x})}{2(1+\cos x)^2(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$y' = \frac{\cancel{(1+\cos x)}(\cancel{2}\operatorname{sen} x)}{\cancel{2}(1+\cos x)^{\cancel{2}}(1-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\therefore\quad y' = \csc x$$

2 ••Deriva las siguientes funciones implícitas.

1. $\cot y = x - y$

$$\frac{d}{dx}(\cot y) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y)$$

$$-\csc^2 y\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - \csc^2 y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(1-\csc^2 y) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-\csc^2 y)} = \frac{1}{-(\csc^2 y - 1)} = \frac{1}{-\cot^2 y}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = -\tan^2 y$$

2. $\operatorname{sen} x + \cos y = e^y$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \frac{d}{dx}(\cos\ y) = \frac{d}{dx}(e^y)$$
$$\cos\ x + (-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} = e^y\frac{dy}{dx}$$
$$\cos\ x - \operatorname{sen} y\ \frac{dy}{dx} = e^y\frac{dy}{dx}$$
$$-e\frac{dy}{dx} - \operatorname{sen} y\ \frac{dy}{dx} = -\cos\ x$$
$$\frac{dy}{dx}(-e^y - \operatorname{sen} y) = -\cos x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos\ x}{-e^y - \operatorname{sen} y} = \frac{-\cos\ x}{-(e^y + \operatorname{sen} y)}$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\ x}{e^y - \operatorname{sen} y}$$

3. $x^2y - \operatorname{sen} xy = xy^3$

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} xy) = \frac{d}{dx}(xy^3)$$
$$x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^2) - \cos\ xy\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{d}{dx}(y^3) + y^3\frac{d}{dx}(x)$$
$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - \cos\ xy\left[x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x)\right] = 3xy^2\frac{dy}{dx} + y^3$$
$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - x\ \cos xy\frac{dy}{dx} - y\ \cos xy = 3xy^2\frac{dy}{dx} + y^3$$
$$x^2\frac{dy}{dx} - x\ \cos xy\frac{dy}{dx} - 3xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 + y\ \ \cos xy - 2xy$$
$$\frac{dy}{dx}(x^2 - x\ \cos xy - 3xy^2) = y^3 + y\cos xy - 2xy$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + y\cos xy - 2xy}{x^2 - x\ \cos xy - 3xy^2}$$

3 ••• Aplicando la derivación logarítmica, determina la derivada para las siguientes funciones.

1. $y = x^{\operatorname{sen} ax}$

$$\ln\ y = \ln\ x^{\operatorname{sen} ax} = \operatorname{sen} ax\ \ln x$$
$$\frac{d}{dx}(\ln\ y) = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} ax\ \ln x)$$
$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} ax\frac{d}{dx}(\ln\ x) + \ln\ x\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} ax)$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\text{sen } ax\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\ x\ \cos ax\frac{d}{dx}(ax)$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{\text{sen } ax}{x}+a\ln x\ \cos ax$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{\text{sen } ax}{x}+a\ \ln x\ \cos ax\right)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=x^{\text{sen } ax}\left(\frac{\text{sen } ax}{x}+a\ \ln x\cos ax\right)$$

2. $y=(\cos 2x)^x$

$$\ln y=(\cos 2x)^x=x\ \ln\ \cos 2x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln\ y)=\frac{d}{dx}(x\ \ln\ \cos 2x)$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}(\ln\ (\cos 2x))+\ln(\cos 2x)\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=x\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)\frac{d}{dx}(\cos 2x)+\ln(\cos 2x)$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{\cos 2x}(-\text{sen } 2x)\ \frac{d}{dx}(2x)+\ln(\cos 2x)$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{-2x\ \text{sen } 2x}{\cos 2x}+\ln\cos 2x=-2x\ \tan 2x+\ln(\cos 2x)$$

$$\frac{dy}{dx}=y(-2x\ \tan 2x+\ln(\cos 2x))$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=(\cos 2x)^x(\ln(\cos\ 2x)-2x\ \tan 2x)$$

Fórmulas fundamentales para derivar funciones trigonométricas inversas

Teniendo presente el concepto de función inversa, obtendremos las fórmulas para las derivadas de funciones trigonométricas inversas.

1. La derivada de la función arcoseno de una variable es igual al cociente de la derivada de la función dividida entre la raíz cuadrada de uno menos el cuadrado de la función.

$$\frac{d}{dx}=(\text{arcsen } v)=\frac{\frac{d}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

Fórmula fundamental de derivación número 23.

Demostración. Si $y = \text{arcsen } v$, es decir, $v = \text{sen } y$. Al derivar implícitameme con respecto a v, resulta:

$$\begin{aligned}
\text{sen } y &= v \\
\frac{d}{dx}(\text{sen } y) &= \frac{d}{dx}(v) \\
\cos y \frac{dy}{dv} &= 1 \\
\frac{dy}{dv} &= \frac{1}{\cos y} \quad \Bigg\} \text{ Sustituyendo la igualdad en la regla de la cadena, se tiene:} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos\ y}\ \frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

Mediante la identidad trigonométrica $\text{sen}^2\, y + \cos^2\, y = 1$ y al despejar el coseno de la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
\cos^2\, y &= 1 - \text{sen}^2 y \\
\cos\ y &= \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}
\end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación de derivación, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\ y}}\ \frac{dv}{dx}$$

Como $\text{sen } y = v$, entonces al sustituir se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\ \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

2. La derivada del arcocoseno de una función es igual a menos el cociente de la derivada de la función dividida entre la raíz cuadrada de uno menos el cuadrado de la función.

$$\frac{d}{dx}(\arccos v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \Bigg\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 24.}$$

Demostración. Si $y = \arccos v$, es decir, $v = \cos y$. Al derivar implícitamente con respecto a v, resulta:

$$\cos\ y = v$$

$$\frac{d}{dv}(\cos\ y) = \frac{d}{dv}(v)$$

$$-\text{sen}\ y\ \frac{dy}{dv} = 1$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dv} &= \frac{1}{-\text{sen}\ y} = -\frac{1}{\text{sen}\ y}\\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\text{sen}\ y}\frac{dv}{dx}\end{aligned}\right\}\quad \text{Sustituyendo la igualdad en la regla de la cadena, se tiene:}$$

Mediante la fórmula trigonométrica $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ y al despejar a seno de la ecuación anterior se tiene:

$$\text{sen}^2\ y = 1 - \cos^2 y$$

$$\text{sen}\ y = \sqrt{1-\cos^2 y}$$

Al sustituir en la ecuación de derivación, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\ \frac{dy}{dx}$$

Como $\cos y = v$, entonces, al sustituir se tiene que: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\ \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$ L.C.D.D.

3. La derivada de la función arcotangente de una función es igual al cociente de la derivada de la función dividida entre uno, más el cuadrado de la función.

$$\left.\frac{d}{dx} = (\arctan v) = \frac{\frac{dy}{dx}}{1+v^2}\ \right\}\quad \text{Fórmula fundamental de derivación número 25.}$$

Demostración. Si $y = \arctan v$, es decir, $v = \tan y$. Al derivar implícitamente con respecto a v, resulta:

$$\tan\ y = v$$

$$\frac{d}{dv}(\tan\ y) = \frac{d}{dv}(v)$$

$$\sec^2 y\frac{dy}{dv} = 1$$

$$\left.\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec^2 y}\ \right\}\quad \text{Sustituyendo la igualdad en la regla de la cadena, se tiene:}$$

Mediante la identidad trigonométrica, $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}\frac{dv}{dx}$$

al sustituir el valor del cuadrado de la secante en la ecuación de derivación, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 \ y}\frac{dv}{dx}$$

Como $\tan y = c$, entonces, al sustituir tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+v^2}\ \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2} \quad \text{L.C.D.D.}$$

4. La derivada del arcocotangente de una función es igual a menos el cociente de la derivada de la función dividida entre uno, más el cuadrado de la función.

$$\frac{d}{dx}(\text{arccot } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2} \quad \Bigg\} \text{ Fórmula fundamental de derivación número 26.}$$

Demostración. Si $y = \text{arccot } v$, es decir, $v = \cot y$. Al derivar implícitamente con respecto a v, resulta:

$$\cot y = v$$

$$\frac{d}{dv}(\cot y) = \frac{d}{dv}(v)$$

$$-\csc^2 y\frac{dy}{dv} = 1$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{-\csc^2 y} = -\frac{1}{\csc^2 y} \quad \Big\} \text{ Sustituyendo la igualdad en la regla de la cadena, se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\csc^2 y}\ \frac{dv}{dx}$$

Mediante identidad trigonométrica $\csc^2 y = 1 + \cot^2 y$, al sustituir en la ecuación de derivación resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\cot^2 y}\frac{dv}{dx}$$

Como $\cot y = v$, entonces, al sustituir se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2} \quad \text{L.C.D.D.}$$

5. La derivada del arcosecante de una función es igual al cociente de la derivada de la función dividida entre el producto de la función por la raíz cuadrada del cuadrado de la función, menos la unidad.

$$\frac{d}{dx} = (\operatorname{arcsec} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$$

Fórmula fundamental de derivación número 27.

Demostración. Si $y = \operatorname{arcsec} v$, es decir, $v \sec y$. Al derivar implícitamente con respecto a v, resulta:

$$\sec\ y = v$$

$$\frac{d}{dv}(\sec\ y) = \frac{dv}{dv}$$

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dv} = 1$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

Sustituyendo la igualdad en la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}\frac{d}{\boldsymbol{dx}}$$

Mediante la identidad trigonométrica $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ y al despejar $\tan y$ se tiene:

$$\tan^2 y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

Al sustituir en la ecuación de derivación, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}}\frac{dv}{dx}$$

Como $\sec y = v$, entonces, al sustituir se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}} \quad \text{L.C.D.D.}$$

6. La derivada del arcocosecante de una función es igual a menos el cociente de la derivada de la función dividida entre el producto de la función por la raíz cuadrada de la variable al cuadrado de la función menos la unidad.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$$

Fórmula fundamental de derivación número 28.

Demostración Si $y = \text{arccsc } v$, es decir, $v = \csc y$. Al derivar implícitamente con respecto a v, resulta:

$$\csc y = v$$

$$\frac{d}{dv}(\csc y) = \frac{dv}{dv}$$

$$-\csc y \cot y \frac{dy}{dv} = 1$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{-\csc y \cot y} = -\frac{1}{\csc y \cot y}$$

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{1}{\csc y \cot y}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo la igualdad en la regla de la cadena, se tiene:

Mediante identidades trigonométricas, como:

$\cot^2 y = \csc^2 y - 1$ y $\cot y = \sqrt{\csc^2 y - 1}$, al sustituir en la ecuación de derivación, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\csc y\sqrt{\csc^2 y - 1}}\frac{dv}{dx}$$

Como $\csc y = v$, entonces, al sustituir tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Deriva las siguientes funciones trigonométricas inversas.

1. $y = \text{arcsen } \sqrt{ax}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\text{arcsen } \sqrt{ax}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{ax}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{ax}\right)^2}} = \frac{\frac{\frac{d}{dx}(ax)}{2(ax)^{\frac{2-1}{2}}}}{\sqrt{1-ax}}$$

$$y' = \frac{\frac{a}{2(ax)^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1-ax}} = \frac{a}{2\sqrt{ax}\sqrt{1-ax}}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{a}{2\sqrt{ax - a^2x^2}}$$

2. $y = \arccos \dfrac{x}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\arccos \frac{x}{2}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} = -\frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\cancel{2}}}$$

$$\therefore \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

3. $y = \arctan 2x^2$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(\arctan 2x^2) = \frac{\frac{d}{dx}(2x^2)}{1+(2x^2)^2} = \frac{2(2x^{2-1})}{1+4x^4}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{4x}{1+4x^4}$$

4. $y = \operatorname{arccot} \dfrac{x}{a}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccot} \frac{x}{a}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\therefore \quad y' = -\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+x^2}$$

5. $y = \operatorname{arcsec} \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsec} \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} = -\frac{\frac{1}{\cancel{x^2}}}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cancel{x^2}}}$$

$$\therefore \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6. $y = \operatorname{arccsc} mx$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} mx) = -\frac{\frac{d}{dx}(mx)}{mx\sqrt{(mx)^2-1}}$$

$$y' = -\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}x\sqrt{m^2x^2-1}}$$

$$\therefore \quad y' = -\frac{1}{x\sqrt{m^2x^2-1}}$$

7. $y = \frac{1}{3}x^3 \arctan x + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) - \frac{1}{6}x^2$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\arctan x\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{6}\ln(x^2+1)\right] - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^2\right)$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[x^3\frac{d}{dx}(\arctan x) + \arctan x\frac{d}{dx}(x^3)\right] + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(x^2+1)}\frac{d}{dx}(x^2+1)\right] - \frac{1}{6}(2x^{2-1})$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[x^3\left(\frac{\frac{d}{dx}(x)}{1+x^2}\right) + \arctan x(3x^{3-1})\right] + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(x^2+1)}(2x^{2-1})\right] - \frac{2x}{6}$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2\arctan x\right] + \frac{2x}{6(x^2+1)} - \frac{x}{3}$$

$$y' = \frac{x^3}{3(1+x^2)} + x^2\arctan x + \frac{x}{3(x^2+1)} - \frac{x}{3}$$

$$y' = \frac{x^3 + 3x^2(1+x^2)\arctan x + x - x(1+x^2)}{3(1+x^2)}$$

$$y' = \frac{\cancel{x^3} + 3x^2(1+x^2)\arctan x + \cancel{x} - \cancel{x} - \cancel{x^3}}{3(1+x^2)} = \frac{\cancel{3}x^2\cancel{(1+x^2)}\arctan x}{\cancel{3}\cancel{(1+x^2)}}$$

$$\therefore \quad y' = x^2\arctan x$$

8. $\arccos(x^2y) + 3x^2 + 5y^2 = 2a$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x^2y) + \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(5y^2) = \frac{d}{dx}(2a)$$

$$-\left[\frac{\frac{d}{dx}(x^2y)}{\sqrt{1-(x^2y)^2}}\right] + 6x + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\left[\frac{x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2)}{\sqrt{1-x^4y^2}}\right] + 6x + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\left[\frac{x^2\dfrac{dy}{dx}+2xy}{\sqrt{1-x^4y^2}}\right]+6x+10y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{-x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy+6x\sqrt{1-x^4y^2}+10y\dfrac{dy}{dx}\sqrt{1-x^4y^2}}{\sqrt{1-x^4y^2}}=0$$

$$-x^2\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^4y^2}=2xy-6x\sqrt{1-x^4y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(10y\sqrt{1-x^4y^2}-x^2\right)=2xy-6x\sqrt{1-x^4y^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2xy-6x\sqrt{1-x^4y^2}}{10y\sqrt{1-x^4y^2}-x^2}$$

EJERCICIO 15

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

1. ¿Cómo se determina el valor del número e?
2. ¿Cuál es la base del logaritmo natural?
3. Explica cómo se relacionan los logaritmos naturales y los comunes.
4. ¿Por qué las funciones logarítmicas y exponenciales son inversas?
5. Demuestra las fórmulas fundamentales de derivación para:
   a) Funciones logarítmicas y exponenciales.
   b) Funciones trigonométricas directas.
   c) Funciones trigonométricas inversas.

II. Determina el logaritmo natural de los siguientes números.

a) 5	*d)* 11	*g)* 34	*j)* 385
b) 7	*e)* 18	*h)* 76	*k)* 694
c) 9	*f)* 29	*i)* 123	*l)* 1956

III. Determina el logaritmo común de los siguientes números.

a) 48	*d)* 469	*g)* 7580
b) 92	*e)* 851	*h)* 13975
c) 217	*f)* 1024	*i)* 68402

IV. Encuentra la derivada para las siguientes funciones logarítmicas y exponenciales.

1. $y = \ln(2x^2 + 3x - 5)$
2. $y = \log\left(\dfrac{4x}{2+x^2}\right)$
3. $y = 5^{2x^3}$
4. $y = 2e^{x^2}$
5. $y = (e^x)^x$
6. $y = \ln\left(\sqrt{4-x^2}\right)$
7. $y = \ln\left(\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\right)$
8. $y = \ln\left(\sqrt{x^2-2x}\right)$
9. $y = \ln(x^2 + 1)$
10. $y = \ln^2(x^3)$
11. $y = \ln(x^2 + 3)^2$
12. $y = \log 5x^3$
13. $y = \log\sqrt{2-x}$
14. $y = \log\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$
15. $y = \log\dfrac{a}{x}$
16. $y = \log x\sqrt{x-1}$
17. $y = x^2 \log x^2$
18. $y = e^{5x}$
19. $y = a^{3x}$
20. $y = \dfrac{2}{e^{2x}}$
21. $y = \log\dfrac{e^x}{x}$
22. $y = \dfrac{\ln(ax)}{ax}$
23. $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
24. $y = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
25. $y = \dfrac{2}{a}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)$
26. $y = x^3e^{x^2}$
27. $y = a^{(2-x)}$
28. $y = 10^{-x^2}$
29. $y = \log\left(1+e^{2x}\right)$
30. $y = x^2e^{-4x}$
31. $y = a^{\sqrt{x}}$
32. $y = \ln\left(ax\sqrt{a^2-x^2}\right)$
33. $y = \ln\left(x^2e^x\right)$
34. $y = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$
35. $y = \left(\dfrac{5}{x}\right)^x$
36. $y = e^{\sqrt{x}} \ln\sqrt{x}$
37. $y = 10^{x^2} \log x^2$
38. $y = (ae)^{2x}$
39. $y = 3^x x^3$
40. $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\sqrt{x}}$
41. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)$
42. $y = \dfrac{\ln\sqrt{a^2-x^2}}{x}$
43. $y = \sqrt{e^x+1}$
44. $y = (\ln x)^x$
45. $y = (e^x)^{\ln x}$
46. $y = \sqrt{\log x}$
47. $y = 10e^x \log x$
48. $y = \ln\left(\sqrt{\dfrac{a+bx}{x-bx}}\right)$
49. $y = \ln\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)$
50. $y = (1+x^2)\ln x^2$
51. $y = \left(\dfrac{3}{x}\right)^x$
52. $y = \dfrac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right)$
53. $y = \ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$
54. $y = e^x \ln(e^x)$
55. $y = \log\sqrt{\dfrac{2-3x}{2+3x}}$
56. $y = \dfrac{\ln\left(\sqrt{a+bx}\right)}{\sqrt{a-bx}}$
57. $y = 10^{nx}$
58. $y = (e^{-x} + e^x)^2$
59. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$
60. $y = \ln^2(x^3)$

V. Aplicando la derivación logarítmica, encuentra la derivada de las siguientes funciones y comprueba los resultados por medio de la derivación por fórmula directa.

1. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+3}}{x}\right)$
2. $y = \log\left(\frac{x^2+a^2}{x+a}\right)$
3. $y = \ln(x^2+2)$
4. $y = (x)^{x^2}$
5. $y = (x)^{\frac{x}{2}}$
6. $y = x^2(a+bx)^3$
7. $y = (1-x^2)^{(1+x^2)}$
8. $y = a^{ax}$
9. $y = 2^{x^2}$
10. $y = \ln x\sqrt{1+x^2}$
11. $y = \ln\left(\sqrt{2-x^2}\right)$
12. $y = \log\frac{1-x^2}{x^2}$
13. $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$
14. $y = \frac{(x+3)(x+4)}{(x+1)(x+2)}$
15. $y = x^{ax}$
16. $y = (7-4x^2)^{\sqrt{5-x^2}}$
17. $y = \ln\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}\right)$
18. $y = \frac{\sqrt{a+bx}}{x\sqrt[3]{b+ax}}$
19. $y = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$
20. $y = \frac{x\sqrt[3]{9+x^2}}{\sqrt[3]{20-3x}}$

VI. Encuentra la derivada para las siguientes funciones trigonométricas directas.

1. $y = \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2}$
2. $y = \cos ax^2$
3. $y = \tan\sqrt{a^2-x^2}$
4. $y = \cot^3 x^2$
5. $y = a\sec\frac{x}{a}$
6. $y = \sqrt{\csc ax}$
7. $y = 3\operatorname{sen} 2x$
8. $y = \frac{1}{3}\cos^3 2x$
9. $y = \sqrt{\tan ax}$
10. $y = \sqrt[3]{\csc 2x}$
11. $y = \frac{a}{\sqrt{\cot ax}}$
12. $y = 2x\tan 2x$
13. $y = \frac{\tan ax}{ax}$
14. $y = 2x^2\cos x^2$
15. $y = \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}\right)$
16. $y = \operatorname{sen} 5x\cos 3x$
17. $y = \ln\left(\sqrt{\sec 4x}\right)$
18. $y = e^{x^2}\cos 2x$
19. $y = e^{\sqrt{x}}\operatorname{sen}\sqrt{x}$
20. $y = \ln\cot\frac{x}{a}$
21. $y = \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + x$
22. $y = \ln\left(\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}\right)$
23. $y = ax - \cos bx$
24. $y = \frac{x}{2}\cos x$
25. $y = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}$
26. $y = 10^x\operatorname{sen} x$
27. $y = \csc^3 2x$
28. $y = e^x(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$
29. $y = \tan^3(e^{x^2})$
30. $y = \ln\cot ax$
31. $y = \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$
32. $y = x\tan x$
33. $y = \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$
34. $y = \sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$
35. $y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$
36. $y = \frac{\cos 2x}{4+\operatorname{sen} 2x}$
37. $y = \cos(\ln x^2)$

38. $y = a\cos\sqrt{x}$

39. $y = \csc 2x \cot 2x$

40. $y = \ln \sec^2 3x$

41. $y = \dfrac{\tan^2 ax}{a^2 + x^2}$

42. $y = a^x \csc ax$

43. $y = \sec^2 2x$

44. $y = \sqrt{1 + \sec^2 ax}$

45. $y = \csc^3 2x$

46. $y = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

47. $y = \tan(x + 3x^2)$

48. $y = x^2 \operatorname{sen} 4x$

49. $y = \operatorname{sen}^3(a + bx)$

VII. Aplicando la derivación logarítmica, encuentra la derivada de las siguientes funciones y comprueba los resultados por medio de la derivación por fórmula directa.

1 $y = x^{\cos x}$

2. $y = (\operatorname{sen} ax)^x$

3. $y = (\tan x)e^x$

4. $y = (\operatorname{sen} x^2)^{\tan x^2}$

5. $y = \dfrac{\sec ax\sqrt{1 - \cot^2 ax}}{\csc^3 ax}$

6. $y = \dfrac{\tan^2 2x}{\sqrt{1 + \sec^2 2x}}$

7. $y = \left(\dfrac{1}{\csc x}\right)^{\frac{1}{\sec x}}$

8. $y = (\tan 2x)^{2x}$

9. $y = (\ln ax)^{\cot 2x}$

10. $y = (\operatorname{sen} x)^{e^x}$

11. $y = (\cot x)^{2x}$

12. $y = (\cos x)^{x^2}$

13. $y = (\ln \operatorname{sen} x)^{e^x}$

14. $y = (\ln \cos ax)^{e \cos 2x}$

15. $y = (\tan ax)^{\cot ax}$

16. $y = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{x + \cos x}}$

VIII. Encuentra la derivada para las siguientes funciones trigonométricas inversas.

1. $y = \operatorname{arcsen}(ax^2 + bx + c)$

2. $y = 3 \arccos \dfrac{x}{4}$

3. $y = x \arctan x$

4. $y = \arctan 2x + \operatorname{arccot} 2x$

5. $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arccot}\left(\dfrac{ax}{2}\right)$

6. $y = \operatorname{arccsc}\left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)$

7. $y = x \arccos ax$

8. $y = \operatorname{arcsec}\sqrt{4 + x^2}$

9. $y = \operatorname{arcsen}(\cos 2x)$

10. $y = 4\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2} + x\sqrt{4 + x^2}$

11. $y = x \arccos x + \sqrt{1 - x^2}$

12. $y = x \operatorname{arccsc} ax + \sqrt{a^2 - x^2}$

13. $y = x \operatorname{arccot} x + \ln\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$

14. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arccos\dfrac{x}{a}$

15. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} + \dfrac{1}{a}\operatorname{arcsec}\dfrac{x}{a}$

16. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arccsc}\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}$

17. $y = 4\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x - 2}{2}\right) + (x - 2)\sqrt{4x - x^2}$

18. $y = \dfrac{\operatorname{arccot} 2x}{x} + \sqrt{2ax - x^2}$

19. $y=\sqrt{x}\ \text{arccot}\dfrac{x}{4}+\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

20. $y=\arccos 2ax+\dfrac{2ax}{1-4a^2x^2}$

21. $y=\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+\dfrac{\arctan x}{2}$

22. $y=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\dfrac{\text{arcsen}\ x}{2}$

23. $y=x\arctan 5x-\dfrac{1}{10}\ln(1+25x^2)$

24. $y=a^{\text{arcsec}\ 2x}$

25. $y=x^3\arctan 2x$

26. $y=\dfrac{1}{\text{arcsen}\ 2x}$

27. $y=\text{arcsen}\ (e^{-x})$

28. $y=\ln\left(\text{arcsen}\sqrt{x}\right)$

29. $y=(\arctan 2x)^3$

30. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\text{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

31. $y=\sqrt{3x^2-1}-\arctan\sqrt{3x^2-1}$

32. $y=\text{arccsc}\ \sqrt{x}$

33. $y=\dfrac{x\ \text{arcsec}\ 3x}{e^{2x}}$

34. $y=\text{sen}\ ax\ \text{arcsen}\ ax$

IX. Encuentra la derivada para las siguientes funciones implícitas.

1. $\arccos 2x=e^{2x}+2y$
2. $x^2\ \text{sen}\ y+3x^3=\arctan y$
3. $\ln(\text{sen}\ 3x)^2=e^x+\text{arccot}\ y$
4. $\arccos(x+y)=\text{arcsen}\ xy$
5. $5x+3y=2\ \text{sen}\ x+4\cos y$
6. $\text{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$
7. $x^2\ \text{sen}\ y+x=\arctan y$
8. $\dfrac{e^{xy}}{x}=x\ln(xy)-a$
9. $3xy^2-\cos 2xy=0$
10. $e^y\tan x-e^y\cot x=0$
11. $\cos(x+y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-6$
12. $\text{arcsec}\ x^2y+a(x^2+y)=b$
13. $e^x\ \text{sen}\ y+\ln(xy)=xy$
14. $\ln\cos(x-y)=xy$
15. $x\cos y-ye^x=\text{arcsen}\ \dfrac{3y}{x^2}$
16. $x\cos y=\text{sen}\ (x+y)$
17. $\cos 2y=\tan 3x$
18. $x^2\ \text{sen}\ y+2x\cos y-2\ \text{sen}\ y=x$
19. $\cos 2y-\cos(x+y)=a^2$
20. $\dfrac{3\sec^2 2y}{2\ \text{sen}\ 3x}=b$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Derivadas sucesivas

Se ha establecido que la derivada de una función es también una función y que puede ser a su vez derivada, si de la misma manera se continúa con el proceso tenemos que la derivada de la primera derivada se denominará segunda derivada de la función original, la derivada de la segunda derivada se llamará a su vez tercera derivada y, así sucesivamente, hasta la enésima derivada, el proceso anterior se denomina **derivación sucesiva** de una función y las derivadas que se obtienen son derivadas de orden superior de una función.

Ejemplo

Si $y = x^4 + 5x^2$, entonces:

$$y' = 4x^3 + 10x \quad \} \quad \text{Primera derivada}$$
$$y'' = 12x^2 + 10 \quad \} \quad \text{Segunda derivada}$$
$$y''' = 24x \quad \} \quad \text{Tercera derivada}$$
$$y^{(4)} = 24 \quad \} \quad \text{Cuarta derivada}$$
$$y^{(5)} = 0 \quad \} \quad \text{Quinta derivada}$$

Notación para las derivadas sucesivas

Por lo general, la simbología que se emplea para indicar las derivadas sucesivas de una función es:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) \quad \Big\} \quad \text{Primera derivada}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) \quad \Big\} \quad \text{Segunda derivada}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) \quad \Big\} \quad \text{Tercera derivada}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} = f^{(4)}(x) \quad \Big\} \quad \text{Cuarta derivada}$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = y^{(5)} = f^{(5)}(x) \quad \Big\} \quad \text{Quinta derivada}$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^n(x) \quad \Big\} \quad \text{Enésima derivada}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la tercera derivada de la función $y = 4x^3 - 6x^2 + 8$.

Al derivar se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y' = 4\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(8)$$

$$y' = 4(3x^{3-1}) - 6(2x^{2-1})$$

$$y' = 12x^2 - 12x \quad \} \text{ Primera derivada}$$

$$y'' = 12\frac{d}{dx}(x^2) - 12\frac{d}{dx}(x)$$

$$y'' = 12(2x^{2-1}) - 12$$

$$y'' = 24x - 12 \quad \} \text{ Segunda derivada}$$

$$y''' = 24\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(12)$$

$$y''' = 24 \quad \} \text{ Tercera derivada}$$

2 Encuentra la segunda derivada de la función $s = \sqrt{1+2t}$.

Al derivar se tiene:

$$\left.\frac{ds}{dt} = s' = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+2t}\right) = \frac{\frac{d}{dt}(1+2t)}{2(1+2t)^{\frac{2-1}{2}}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1+2t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+2t}}\right\} \text{ Primera derivada}$$

$$s'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2t}}\right) = -\frac{1}{\left(\sqrt{1+2t}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+2t}\right) = -\frac{1}{(1+2t)}\left[\frac{\frac{d}{dt}(1+2t)}{2(1+2t)^{\frac{2-1}{2}}}\right]$$

$$\left.s'' = -\frac{1}{(1+2t)}\left[\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1+2t)^{\frac{1}{2}}}\right] = -\frac{1}{(1+2t)^{\frac{3}{2}}}\right\} \text{ Segunda derivada}$$

3 Encuentra la segunda derivada de la función $y = \frac{ax^3 - x^2}{a - x}$.

Al derivar se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^3 - x^2}{a - x}\right) = \frac{(a-x)\frac{d}{dx}(ax^3 - x^2) - (ax^3 - x^2)\frac{d}{dx}(a - x)}{(a-x)^2}$$

$$y' = \frac{(a-x)(3ax^2 - 2x) - (ax^3 - x^2)(-1)}{(a - x^2)} = \frac{3a^2x^2 - 2ax - 3ax^3 + 2x^2 + ax^3 - x^2}{(a-x)^2}$$

$$\left.y' = \frac{3a^2x^2 - 2ax - 2ax^3 + x^2}{(a-x)^2}\right\} \text{ Primera derivada}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[\frac{3a^2x^2 - 2ax - 2ax^3 + x^2}{(a-x)^2}\right]$$

$$y'' = \frac{(a-x)^2 \frac{d}{dx}(3a^2x^2 - 2ax - 2ax^3 + x^2) - (3a^2x^2 - 2ax - 2ax^3 + x^2)\frac{d}{dx}(a-x)^2}{\left[(a-x)^2\right]^2}$$

$$y'' = \frac{(a-x)^2(6a^2x - 2a - 6ax^2 + 2x) - (3a^2x^2 - 2ax - 2ax^3 + x^2)(2)(a-x)^{2-1}\frac{d}{dx}(a-x)}{(a-x)^4}$$

$$y'' = \frac{(a^2 - 2ax + x^2)(6a^2x - 2a - 6ax^2 + 2x) - (3a^2x^2 - 2ax - 2ax^3 + x^2)(2)(a-x)(-1)}{(a-x)^4}$$

Al efectuar las operaciones indicadas resulta:

$$\left. y'' = \frac{6a^4x - 2a^3 - 12a^3x^2 + 2a^2x + 8a^2x^3 + 4ax^4}{(a-x)^4} \quad \right\} \text{ Segunda derivada}$$

4 ••Encuentra la tercera derivada de la función $x^2 + y^2 = r^2$.

Al derivar se tiene:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(r^2)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\left. \frac{dy}{dx} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y} = -\frac{x}{y} \quad \right\} \text{ Primera derivada}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\left[\frac{y\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(y)}{y^2}\right] = -\left[\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right] = -\left[\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2}\right] = -\left[\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2}\right]$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3} \quad \right\} \text{ Segunda derivada}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2 + x^2}{y^3}\right) = -\left[\frac{y^3\frac{d}{dx}(y^2 + x^2) - (y^2 + x^2)\frac{d}{dx}(y^3)}{(y^3)^2}\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\left[\frac{y^3\left(2y\frac{dy}{dx} + 2x\right) - 3y^2\frac{dy}{dx}(y^2 + x^2)}{y^6}\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\left[\frac{2y^4\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 3y^4\frac{dy}{dx} - 3x^2y^2\frac{dy}{dx}}{y^6}\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\left[\frac{2y^3 - y^4\frac{dy}{dx} - 3x^2y^2\frac{dy}{dx}}{y^6}\right] = -\left[\frac{2xy^3 - \frac{dy}{dx}(y^4 + 3x^2y^2)}{y^6}\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3xy^3 + 3x^3y}{y^6} = -\frac{3x\cancel{y}(y^2 + x^2)}{y^{\cancel{6}}} = -\frac{3xr^2}{y^5} \quad \Big\} \text{ Tercera derivada}$$

5 ••Encuentra la segunda derivada de la función $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Al derivar se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right) = x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(x)$$

$$y' = x\left[\frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)}{2(1-x^2)^{\frac{2-1}{2}}}\right] + \sqrt{1-x^2} = x\left[\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \frac{-x^2 + (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Big\} \text{ Primera derivada}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(1-2x^2) - (1-2x^2)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\cancel{2}\sqrt{1-x^2}\right)^{\cancel{2}}}$$

$$y'' = \frac{\sqrt{1-x^2}(-4x) - (1-2x^2)\dfrac{\frac{d}{dx}(1-x^2)}{2(1-x^2)^{\frac{2-1}{2}}}}{(1-x^2)} = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2)\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{(1-x^2)}$$

$$y'' = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \frac{\dfrac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}$$

$$y'' = \frac{-4x + 4x^3 + x - 2x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^3 + 3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Big\} \text{ Segunda derivada}$$

6 Encuentra la segunda derivada de la función $y = e^x$ sen x.

Al derivar se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(e^x \text{ sen } x) = e^x \frac{d}{dx}(\text{sen } x) + \text{sen } x \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$y' = e^x \cos x + e^x \text{ sen } x = e(\text{sen } x + \cos x) \quad \} \text{ Primera derivada}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(e^x \cos x) + \frac{d}{dx}(e^x \text{ sen } x) = e^x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \frac{d}{dx}(\text{sen } x) + \text{sen } x \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$y'' = -\cancel{e^x \text{ sen } x} + e^x \cos x + e^x \cos x + \cancel{e^x \text{ sen } x}$$

$$y'' = 2e^x \cos x \quad \} \text{ Segunda derivada}$$

7 Encuentra la tercera derivada de la función $y = \ln \cos 2x$.

Al derivar se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(\ln \cos 2x) = \frac{1}{\cos 2x} \frac{d}{dx}(\cos 2x)$$

$$y' = \frac{1}{\cos 2x}(-\text{sen } 2x)\frac{d}{dx}(2x) = \frac{-2 \text{ sen } 2x}{\cos 2x} = -2 \tan 2x \quad \} \text{ Primera derivada}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} - (2 \tan 2x) = -2 \sec^2 2x \frac{d}{dx}(2x) = -4 \sec^2 2x \quad \} \text{ Segunda derivada}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}[-4(\sec 2x)^2] = -4(2)(\sec 2x)^{2-1} \frac{d}{dx}(\sec 2x)$$

$$y''' = -8 \sec 2x(\sec 2x \tan 2x)\frac{d}{dx}(2x)$$

$$y''' = -16 \sec^2 2x \tan 2x \quad \} \text{ Tercera derivada}$$

8 Encuentra la segunda derivada de la función $y = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Al derivar se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}$$

$$y' = \frac{\dfrac{(1-x)\frac{d}{dx}(1+x) - (1+x)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}}{1+\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{(1-x)(1)-(1+x)-(-1)}{\cancel{(1-x)^2}}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{\cancel{(1-x)^2}}} = \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{1-\cancel{2}x+x^2+1+\cancel{2}x+x^2} = \frac{2}{2+2x^2}$$

$$y' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)} \quad \Big\} \text{ Primera derivada}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{d}{dx}(1+x^2) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \Big\} \text{ Segunda derivada}$$

EJERCICIO 16

I. En equipo, encuentren la segunda derivada para las siguientes funciones y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes	
Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. $y = \frac{2+x}{2-x}$
2. $y = \sqrt{4+x^2}$
3. $y = \frac{5x^2}{2+x}$
4. $y = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$
5. $y^2 = 4ax$
6. $3x^2 + 2bxy + 5y^2 = a$
7. $y^4 + 2x^2y^2 = b^4$
8. $y = x\sqrt{2-3x}$
9. $x^2 + 4xy = 32$
10. $x^2 + 2xy + y^2 + 5 = 0$
11. $y = \sqrt[3]{4-x^2}$
12. $y = \cos(1-x^2)$
13. $y = \sqrt{\text{sen } 2x}$
14. $y = \text{sen}^3(2x-3)$
15. $y = 4\cos\frac{1}{2}x$
16. $y = 9\sec\frac{x}{3}$
17. $y = \log 3x^2$
18. $y = \ln(x+3)$
19. $y = e^{3x^2}$
20. $y = x^2a^x$

II. Encuentra la tercera derivada para las siguientes funciones.

1. $y = \sqrt{a-bx}$
2. $y = \frac{a}{x+b}$
3. $y = x^3 - \frac{3}{x}$
4. $y = x\sqrt{a^2-x^2}$
5. $y^2 - 4xy = 16$
6. $x^3 - 3axy + y^3 = b^3$
7. $y = \sqrt[4]{a-bx}$

8. $y = \dfrac{1}{x-3}$
9. $y = x^2 - 4x + 8$
10. $y = 3x^2 + 2x - 1$
11. $y = e^x \ln(x)$
12. $y = e^{-ax}$ sen ax
13. $y = \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$
14. $y = e^{\tan x}$
15. $y = \text{arcsen } e^x$
16. $y = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$
17. $y = x - \log x$
18. $y = x \ln(x)$
19. $y = ax^2 + bx + c$
20. $y = (x^2 - 3)$

III. Encuentra la cuarta derivada para las siguientes funciones.

1. $y = 5x^4 + 3x^2 - x$
2. $y = \sqrt{36 - x^2}$
3. $y = \arctan \sqrt{x}$
4. $y = e^{x^2}$
5. $y = e^{2x} \cos 3x$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Encuentra la derivada de las siguientes funciones y determina el valor de y para el valor dado de la variable.

a) $y=\left(\dfrac{2x+3}{7x^3}\right)^{\frac{1}{5}}$ cuando $x=9$.

b) $y=3x^2-\dfrac{6}{x-5}$ cuando $x=-\dfrac{1}{3}$.

c) $v=(3u^3)\sqrt[7]{2u^4+9}$ cuando $v=2$.

2. Resuelve las siguientes derivadas de funciones compuestas aplicando la regla de la cadena.

a) $y=\sqrt{\dfrac{16-u^2}{4+u}}$ donde $u=\dfrac{x}{1-x}$

b) $y=\dfrac{b^3-u^6}{b^3+u^6}$ donde $u=\sqrt{x+4}$

3. Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones implícitas.

a) $7x^2+8\sqrt{xy}-12y^2$

b) $\dfrac{4}{y^4}-\dfrac{3}{1-x^2}=8x$

c) $2y^2x=\sqrt{x^2+9y^2}+7$

4. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones logarítmicas y exponenciales.

   a) $y = \frac{\ln 15x}{7x^3}$

   b) $y = \frac{20}{c}\left(e^{\frac{x}{5}} - e^{\frac{x}{5}}\right)$

   c) $y = \log(e^{3x} + 6x + 3)$

5. Resuelve las siguientes derivadas de funciones trigonométricas.

   a) $y = \frac{3\text{sen}5x}{\cos 5x}$

   b) $y = \frac{3\sec 10x\sqrt{1-\cot^2 10x}}{\csc^3 10x}$

6. Encuentra la tercera derivada de las siguientes funciones.

   a) $y = e^{6x}\cos 15x$

   b) $y = 5\arctan\sqrt{100x}$

UNIDAD 4

Análisis de funciones

Evaluación diagnóstica

1. ¿Cuándo decimos que tenemos un máximo relativo de una función? ¿Y un mínimo relativo?

2. Determina los puntos de inflexión para las siguientes funciones. Traza sus gráficas correspondientes.

   a) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

   b) $y = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$

3. Menciona dos aplicaciones del uso de derivadas.

4. Indica si las siguientes aseveraciones son falsas (F) o verdaderas (V)

   a) La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por el incremento de la variable independiente. ( )

   b) $\frac{dy}{dx}\Delta y$ Es una forma de expresar una diferencial. ( )

   c) $d(cv) = vdc$ ( )

   d) $dy \approx \Delta y$ si el incremento de la variable independiente dx es muy pequeño. ( )

Análisis de funciones

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca y utilice las aplicaciones geométricas de la derivada.
- Identifique, mediante su gráfica, el carácter creciente y decreciente de una función.
- Conozca el criterio para indicar el carácter creciente o decreciente de una función.
- Identifique y aplique los métodos para determinar los máximos y mínimos de una función.
- Identifique los puntos de inflexión en una gráfica.
- Conozca los criterios para la concavidad de una curva.
- Aplique las reglas para encontrar los puntos de inflexión y el sentido de concavidad de una curva.
- Calcule el valor de las diferentes formas indeterminadas del cálculo infinitesimal.
- Conozca la definición de diferencial y la interprete geométricamente.
- Conozca y aplique las diversas fórmulas fundamentales para determinar las diferencias de funciones.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos con situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Aplicaciones geométricas de la derivada.
- Carácter creciente y decreciente de una función.
- Máximo y mínimo de una función (primer método).
- Puntos de inflexión y sentido de la concavidad de una curva.
- Máximo y mínimo de una función (segundo método).
- Velocidad y aceleración en un movimiento rectilíneo.
- Problemas de optimización sobre máximos y mínimos, áreas y volúmenes.
- Formas indeterminadas del cálculo infinitesimal.
- Diferenciales.

Contenidos procedimentales

- Notará las diferencias entre máximos y mínimos en una función.
- Identificará y determinará los puntos de inflexión en las funciones.
- Resolverá y argumentará problemas relacionados con la aplicación práctica de las derivadas.
- Identificará la diferencial.
- Resolverá problemas aplicando la definición de diferencial.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas al analizar diferentes tipos de funciones.
- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Aplicaciones geométricas de la derivada

El principio fundamental que reglamenta las aplicaciones del cálculo diferencial a la geometría dice *el valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto.*

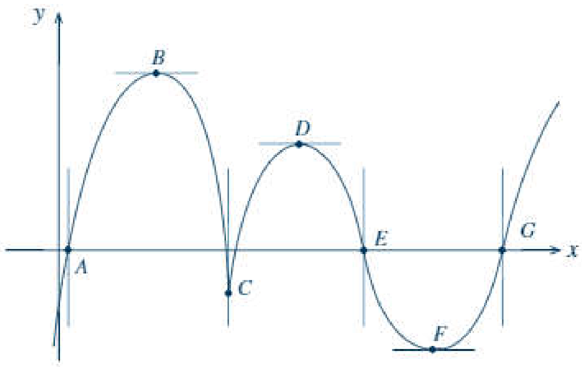
Dirección de una curva

Si θ es el ángulo de inclinación de la tangente y por definición $m = \tan\theta$, entonces la dirección de una curva en cualquier punto se define como:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = m \text{ en } P(x, y)$$

Si la dirección de la curva es paralela al eje de las x, la tangente es horizontal y el ángulo de inclinación $\theta = 0°$, entonces $\frac{dy}{dx} = \tan\theta° = 0$.

Si la dirección de la curva es perpendicular al eje de las x, la tangente es vertical y el ángulo de inclinación $\theta = 90°$, entonces $\frac{dy}{dx} = \tan 90° = \infty$ (se dice que la tangente del ángulo no está definida, o bien, que la tangente se hace infinita).



Los puntos B, D y F en la figura representan tangentes horizontales, mientras que los puntos A, C, E y G representan tangentes verticales.

El ángulo que existe entre dos curvas que se intersectan en un punto común es el que se forma por las tangentes en dicho punto; para encontrar los ángulos de intersección entre dos curvas se emplea la fórmula

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Si $\tan\theta > 0$, el ángulo de intersección es θ.
Si $\tan\theta < 0$, el ángulo de intersección es $180° - \theta$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dada la curva $y = x^3 - 2x^2 + 3$, determina:

a) La inclinación de θ cuando $x = 1$.

b) El ángulo θ cuando $x = 3$.

c) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje x.

d) Los puntos donde $\theta = 45°$.

e) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta $3x - 4y = 8$.

Solución

a)
$$y = x^3 - 2x^2 + 3$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = 3x^2 - 4x$$
$$m = 3x^2 - 4x$$
$$\theta = \arctan m$$
$$\theta = \arctan(-1)$$
$$\therefore \quad \theta = 135°$$

Cuando $x = 1$, tenemos:
$$m = 3(1)^2 - 4(1)$$
$$m = -1$$

La inclinación de θ cuando $x = 1$ es de $135°$.

b) Si $m = 3x^2 - 4x$ cuando $x = 3$, tenemos:
$$m = 3(3)^2 - 4(3)$$
$$m = 27 - 12$$
$$m = 15$$
$$\theta = \arctan m$$
$$\theta = \arctan(15)$$
$$\therefore \quad \theta = 86°11'09''$$

La inclinación de θ cuando $x = 3$ es de $86°11'09''$.

c) Si la dirección de la curva es paralela al eje x, entonces $\theta = 0°$, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x \qquad 3x - 4 = 0$$
$$3x^2 - 4x = 0 \qquad 3x = 4$$
$$x(3x - 4) = 0 \qquad x_2 = \frac{4}{3}$$
$$x_1 = 0$$

Cuando $x = 0$, se tiene:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3$$
$$y = (0)^3 - 2(0)^2 + 3$$
$$y_1 = 3$$

Cuando $x = \frac{4}{3}$, se tiene:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3$$
$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3$$
$$y_1 = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + 3$$
$$y = \frac{64 + 96 + 81}{27}$$
$$y_2 = \frac{49}{27}$$

$\therefore$ Los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje x son $P_1(0,3)$ y $P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{49}{27}\right)$.

d) Si $\theta = 45^\circ$, la $\tan 45^\circ = 1$, entonces $\frac{dy}{dx} = 1$; por tanto, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$
$$3x^2 - 4x = 1$$

$3x^2 - 4x - 1 = 0$ } Por la fórmula general para ecuaciones cuadráticas se tiene:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-1)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{6} = \frac{4 \pm 5.29}{6}$$

$$x_1 = \frac{4 + 5.29}{6} = 1.548 \qquad x_2 = \frac{4 - 5.29}{6} = -0.215$$

Cuando $x = 1.548$, se tiene:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3$$
$$y = (1.548)^3 - 2(1.548)^2 + 3$$
$$y = 3.709 - 4.792$$
$$y_1 = 1.917$$

Cuando $x = -0.215$, obtenemos:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3$$
$$y = (-0.215)^3 - 2(-0.215)^2 + 3$$
$$y = -0.009938 - 0.09245 + 3$$
$$y_2 = 2.897$$

$\therefore$ Los puntos donde la dirección de la curva tiene un ángulo $\theta = 45^\circ$ son $P_1(1.548, 1.917)$ y $P_2(-0.215, 2.897)$.

e) Si la dirección de la curva es paralela a la recta $3x - 4y = 8$, se tiene que:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}$, al sustituir en la derivada de la función tenemos que:

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x$$

$$3x^2-4x=\frac{3}{4}$$

$$12x^2-16x-3=0$$

Por la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, se tiene:

$$x=\frac{16\pm\sqrt{256-4(12)(-3)}}{24}=\frac{16\pm\sqrt{256+144}}{24}=\frac{16\pm 20}{24}$$

$$x_1=\frac{16+20}{24}=\frac{36}{24}=\frac{3}{2} \qquad x_2=\frac{16-20}{24}=\frac{-4}{24}=-\frac{1}{6}$$

Cuando $x=\frac{3}{2}$, obtenemos:

$$y=x^3-2x^2+3$$

$$y=\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$$

$$y=\frac{27}{8}-\frac{18}{4}+3$$

$$y=\frac{27-36+24}{8}$$

$$y=\frac{15}{8}$$

Cuando $x=-\frac{1}{6}$, se tiene:

$$y=x^3-2x^2+3$$

$$y=\left(-\frac{1}{6}\right)^3-2\left(-\frac{1}{6}\right)^2+3$$

$$y=-\frac{1}{216}-\frac{2}{36}+3$$

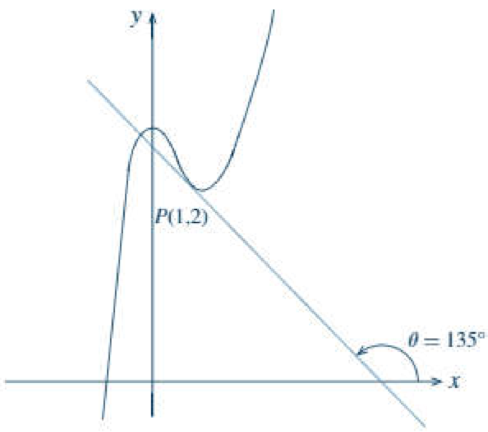
$$y=\frac{-1-12+648}{216}$$

$$y=\frac{635}{216}$$

$\therefore$ Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta $3x - 4y = 8$ son $P_1\left(\frac{3}{2},\frac{15}{8}\right)$ y $P_2\left(-\frac{1}{6},\frac{635}{216}\right)$.

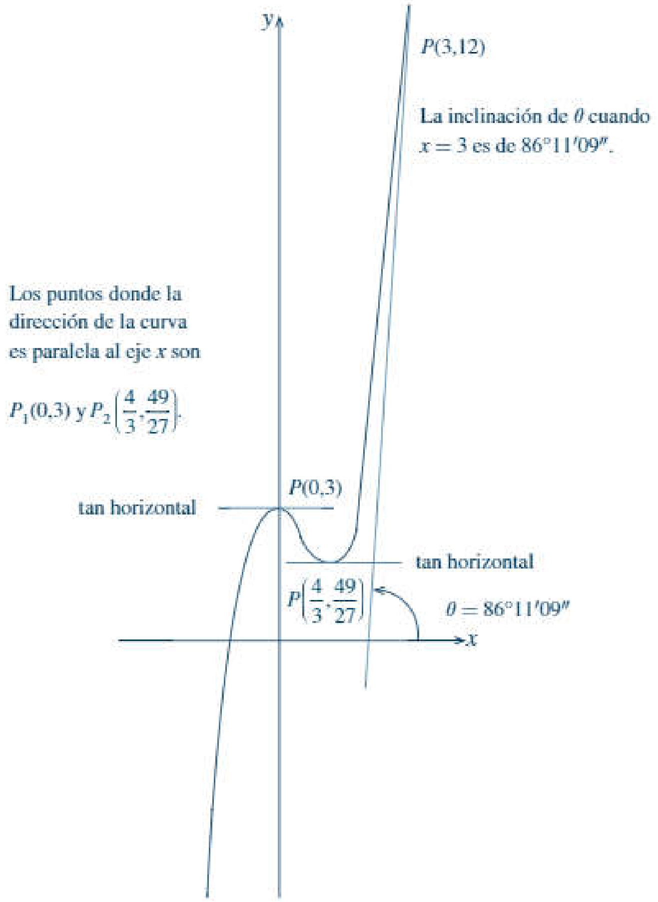
Para realizar la gráfica correspondiente de $y = x^2 - 2x^2 + 3$, se tiene que:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−42	−13	0	3	2	3	12

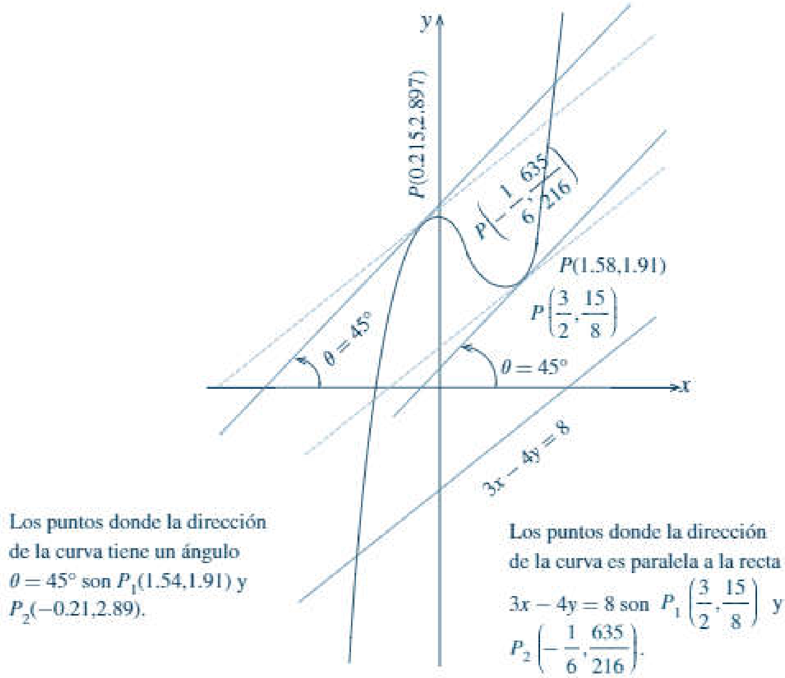


a) La inclinación de θ cuando $x = 1$ es de 135°.

b) y *c*)


y
P(3,12)
La inclinación de θ cuando x = 3 es de 86°11′09″.
Los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje x son $P_1(0,3)$ y $P_2\left(\frac{4}{3},\frac{49}{27}\right)$.
P(0,3)
tan horizontal
tan horizontal
$P\left(\frac{4}{3},\frac{49}{27}\right)$
θ = 86°11′09″
x

d) y *e*)


y
P(0.215,2.897)
$P\left(-\frac{1}{6},\frac{635}{216}\right)$
P(1.58,1.91)
$P\left(\frac{3}{2},\frac{15}{8}\right)$
θ = 45°
θ = 45°
x
3x − 4y = 8
Los puntos donde la dirección de la curva tiene un ángulo θ = 45° son $P_1(1.54,1.91)$ y $P_2(-0.21,2.89)$.
Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta 3x − 4y = 8 son $P_1\left(\frac{3}{2},\frac{15}{8}\right)$ y $P_2\left(-\frac{1}{6},\frac{635}{216}\right)$.

2 Encuentra el ángulo de intersección de las circunferencias.

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y = -7 \qquad (1) \qquad\qquad x^2 + y^2 - 3x - 7y = -12 \qquad (2)$$

Solución

Resolviendo el sistema de las ecuaciones dadas, tenemos:

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8x_1 - 2y = -7 \qquad (1)$$
$$\cancel{-x^2} - \cancel{y^2} + 3x + 7y = 12 \qquad (2)$$
$$-5x + 5y = 5$$
$$5y = 5 + 5x$$
$$y = \frac{\cancel{5}(1+x)}{\cancel{5}}$$

Al sustituir en cualquiera de las ecuaciones dadas resulta:

$$(3) \qquad y = 1 + x$$
$$x^2 + (1+x)^2 - 8x - 2(1+x) = -7$$
$$x^2 + 1 + \cancel{2x} + x^2 - 8X - 2 - \cancel{2x} = -7$$
$$2x^2 - 8x = -6$$

$2x^2 - 8x + 6 = 0$ } Al resolver por factorización obtenemos:

$$(2x-2)\,(x-3) = 0$$
$$2x - 2 = 0 \quad x - 3 = 0$$
$$2x = 2 \qquad x_2 = 3$$
$$x_1 = 1$$

Sustituyendo en la ecuaión 3 resulta:

$$x = \frac{2}{2} \qquad\qquad \text{Para } x = 1 \qquad\qquad \text{Para } x = 3$$
$$x_1 = 1 \qquad\qquad y_1 = 1 + 1 = 2 \qquad\qquad y_2 = 1 + 3 = 4$$

$\therefore$ Los puntos de intersección son $P_1(1,2)$ y $P_2(3,4)$.

Derivando las ecuaciones dadas para obtener las pendientes de las curvas:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y = -7 \quad (1)$$
$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} - 8 - 2\,\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(2y-2) = 8 - 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{8-2x}{2y-2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-x}{y-1} = m_1$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y = -12 \quad (2)$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 3 - 7\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(2y-7) = 3 - 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-2x}{2y-7} = m_2$$

Para $P_1(1,2)$ resulta:

$$m_1 = \frac{4-1}{2-1} = 3 \qquad m_1 = \frac{3-2(1)}{2(2)-7} = \frac{3-2}{4-7} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Para $P_2(3,4)$ tenemos:

$$m_1 = \frac{4-3}{4-1} = \frac{1}{3} \qquad m_2 = \frac{3-2(3)}{2(4)-7} = \frac{3-6}{8-7} = \frac{-3}{1} = -3$$

El ángulo de intersección en $P_1(1,2)$ es:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{1 + (3)\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{-1-9}{3}}{1 - \frac{3}{3}} = \frac{\frac{-10}{3}}{0} = \infty$$

$$\therefore \quad \theta = \arctan\infty$$

$$\theta = 90°$$

El ángulo de intersección en $P_2(3,4)$ es:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 + m_2} = \frac{-3 - \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)(3)} = \frac{\frac{-9-1}{3}}{1 - \frac{3}{3}} = \frac{\frac{-10}{3}}{0} = \infty$$

$$\therefore \quad \theta = \arctan\infty$$

$$\theta = 90°$$

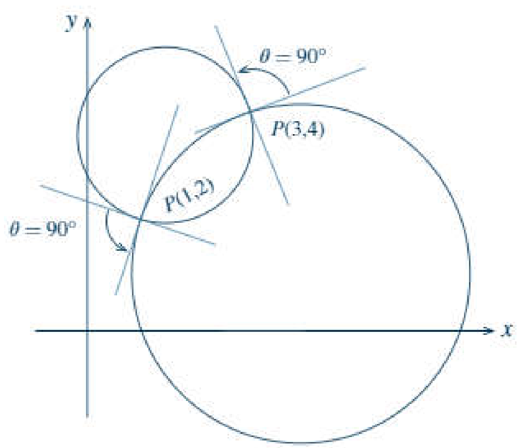
Para graficar se tiene que:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y = -7 \quad \textbf{(1)}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	i	2	+3.4 −1.4	+4 −2	+4.1 −2.1	+4 −2	+3.4 −1.4	2

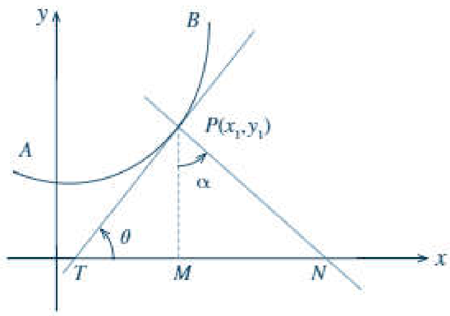
$$x^2 + y^2 - 3x - 7y = -12 \quad \textbf{(2)}$$

x	0	1	2	3
y	+4 +3	+5 +2	+5 +2	+4 +3



Longitudes de tangente normal, subtangente y subnormal

En la siguiente figura se observa que la longitud del segmento que forma parte de la tangente comprendido entre el punto P_1 y el eje x se define como la **longitud de la tangente** (TP_1); su proyección sobre el eje de las x se define como la **longitud de la subtangente** (TM).



También se observa que la longitud del segmento que forma parte de la normal que está comprendido entre el punto de tangencia (P_1) y el eje x, se define como la longitud de la normal (P_1N); su proyección sobre el eje de las x se define como la **longitud de la subnormal** (MN).

En el triángulo TP_1M, sea la hipotenusa (TP_1) la longitud de la tangente; por el teorema de Pitágoras resulta:

$$TP_1 = \sqrt{(TM)^2 + (MP_1)^2} \quad \Big\} \text{ Longitud de la tangente.}$$

$$\text{Si } \tan\theta = \frac{MP_1}{TM} = m_1$$

$$TM = \frac{MP_1}{m_1}, \text{ si } MP_1 = y_1, \text{ entonces se tiene que:}$$

$$TM = \frac{y_1}{m_1}$$

$\therefore$ La longitud de la subtangente es $\frac{y_1}{m_1}$.

En el triángulo MP_1N, sea la hipotenusa (P_1N) la longitud de la normal; por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$P_1N = \sqrt{(MN)^2 + (MP_1)^2} \quad \Big\} \text{ Longitud de la normal.}$$

$$\text{Si } \tan\infty = \frac{MN}{MP_1} = m_1$$

$$MN = m_1(MP_1), \text{ si } MP_1 = y_1, \text{ entonces se tiene que:}$$

$$MN = m_1 y_1$$

$\therefore$ La longitud de la subnormal es $m_1 y_1$.

Si la subtangente se extiende a la derecha de T se considera positiva; si se extiende a la izquierda de T se considera negativa.

Si la subnormal se extiende a la derecha de M se considera positiva; si se extiende a la izquierda de M se considera negativa.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra las ecuaciones de la tangente y la normal; las longitudes de la tangente, subtangente, normal y la subnormal para la curva $xy + y^2 + 2 = 0$ en el punto $P(3,-2)$.

Solución

Derivando $xy + y^2 + 2 = 0$, se obtiene la pendiente de la curva.

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x) + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(2) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y) = -y$$

$$\left.\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+2y}\quad\right\}\ \text{En el punto } P(3,-2)\text{, tenemos:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2}{3+2(-2)} = -\frac{-2}{3-4} = -\frac{-2}{-1} = -2 = m_1$$

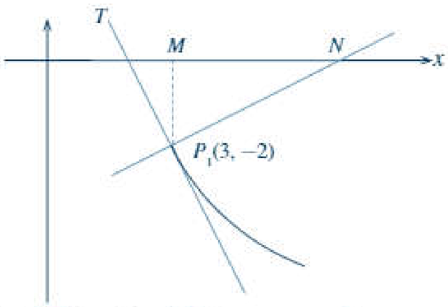
Ecuación de la tangente:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$
$$y + 2 = -2(x-3)$$
$$y + 2 = -2x + 6$$
$$2x + y - 4 = 0$$

Ecuación de la normal:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_1}(x - x_1)$$
$$y + 2 = -\frac{1}{-2}(x-3)$$
$$2y + 4 = x - 3$$
$$x - 2y - 7 = 0$$

Al realizar la gráfica de la curva, se tiene que:



Longitud de la subtangente (TM)

$$TM = \frac{y_1}{m_1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Longitud de la subnormal (MN)

$$MN = m_1 y_1 = (-2)(-2) = 4$$

Si $(TM) = 1$, $(MN) = 4$ y $(MP_1) = y_1 = -2$, tenemos:

Longitud de la tangente (TP_1)

$$TP_1 = \sqrt{(TM)^2 + (MP_1)^2}$$
$$TP_1 = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$
$$TP_1 = \sqrt{5} = 2.236$$

Longitud de la normal (P_1N)

$$P_1N = \sqrt{(MN)^2 + (MP_1)^2}$$
$$P_1N = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2}$$
$$P_1N = \sqrt{20} = 4.472$$

EJERCICIO **17**

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Resuelve los siguientes problemas sobre la dirección de una curva y en plenaria discute tus resultados.

1. Dada la curva $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$, determina:
   a) La inclinación de θ cuando $x = 3\sqrt{2}$.
   b) El ángulo θ cuando $x = 3\sqrt{5}$.
   c) Los puntos donde la dirección de la curva es perpendicular al eje x.
2. Dada la curva $y = x^3 + x^2 - 9x - 9$, encuentra:
   a) La inclinación de θ cuando $x = 2$.
   b) El ángulo θ cuando $x = -2$.
   c) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje x.
   d) Los puntos donde $\theta = 45°$.
   e) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a 1a recta $4x - 3y + 13 = 0$.
3. Dada la curva $x^3 - x - y = 0$, encuentra:
   a) La inclinación de θ cuando $x = 2$.
   b) Los puntos donde $\theta = 60°$.
   c) La ecuación de la tangente y la normal en el punto $P_1\,(-2,-6)$.
4. Dada la curva $x^2 - y^3 = 0$, determina:
   a) La inclinación de θ cuando $x = 8$.
   b) El ángulo θ cuando $x = -1$.
   c) Los puntos donde $\theta = 120°$.
   d) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta $4x - 5y + 17 = 0$.
5. Dada la curva $x^2 + 4x + 3y + 1 = 0$, encuentra:
   a) La inclinación de θ cuando $x = -1$.
   b) El ángulo θ cuando $x = -5$.
   c) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje x.
   d) Los puntos donde $\theta = 135°$.
   e) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta $x - 6y + 19 = 0$.

II. Determina el ángulo de intersección entre las siguientes curvas.

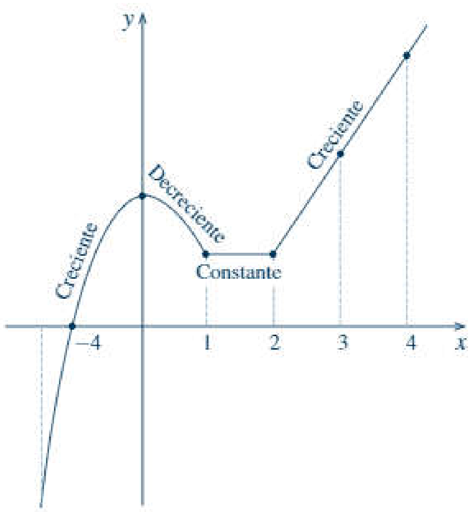
1. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$ con $x^2 - 6x + y^2 = 0$
2. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$ con $x^2 + y^2 - 4y = 0$
3. $8x^3 - y = 0$ con $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$
4. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ con $16y^2 - x = 0$
5. $x - y^4 + 9y^2 = 0$ con $3x - 2y = 0$

III. Encuentra las ecuaciones de la tangente y la normal; las longitudes de la tangente, normal, subtangente y la subnormal para las siguientes curvas en el punto indicado.

1. $y^2 = x^3$ en $P(2,2.82)$
2. $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$ en $P(1.73,0)$
3. $4x^2 - y = 0$ en $P(2,16)$
4. $9y^2 - x = 0$ en $P(36,-2)$
5. $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$ en $P(0,2)$
6. $4x^2 - y^2 - 2y = 2$ en $P(2.54,4)$
7. $y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$ en $P(-1,7)$
8. $x^3 = x + y$ en $P(2,6)$
9. $8x^3 - y = 0$ en $P(-1,-8)$
10. $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$ en $P(1,1.52)$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Carácter creciente y decreciente de una función



La gráfica de una función continua permite identificar dónde o en qué intervalos la función es creciente, constante o decreciente; por ejemplo, en la figura tenemos que:

a) De $x = -\infty$ hasta $x = 0$, la función es creciente.

b) De $x = 0$ hasta $x = 1$, la función es decreciente.

c) De $x = 1$ hasta $x = 2$, la función es constante.

d) De $x = 2$ hasta $x = +\infty$, la función es creciente.

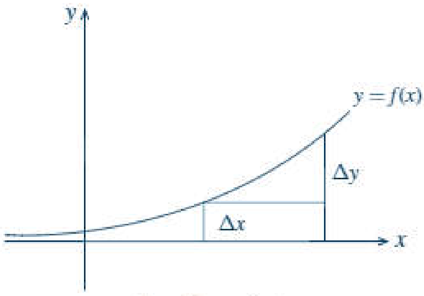
Función creciente

Una función $y = f(x)$ es creciente si al aumentar algebraicamente x, también y aumenta; es decir, la función es creciente en un intervalo si es creciente en todos los valores del intervalo.

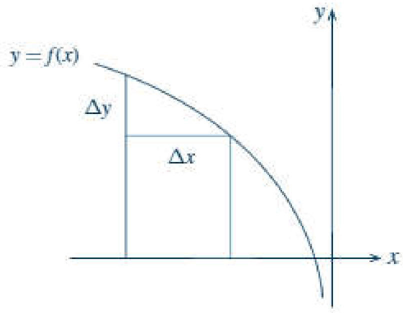
Función decreciente

Una función $y = f(x)$ es decreciente si al aumentar algebraicamente x, la y disminuye, es decir, la función es decreciente en un intervalo si es decreciente en todos los valores del intervalo.

Ejemplos



Función creciente



Función decreciente

Criterio para indicar el carácter creciente o decreciente de una función

Al estudiar si una función es creciente o decreciente en un intervalo dado, la derivada de la función es importante, ya que si la derivada es positiva, la tangente forma un ángulo agudo con el eje x y tiene pendiente positiva (función creciente); si la derivada es negativa, la tangente forma un ángulo obtuso con el eje x y tiene pendiente negativa (función decreciente); por lo anterior: una función es creciente cuando su derivada es positiva y es decreciente cuando su derivada es negativa.

EJEMPLOS

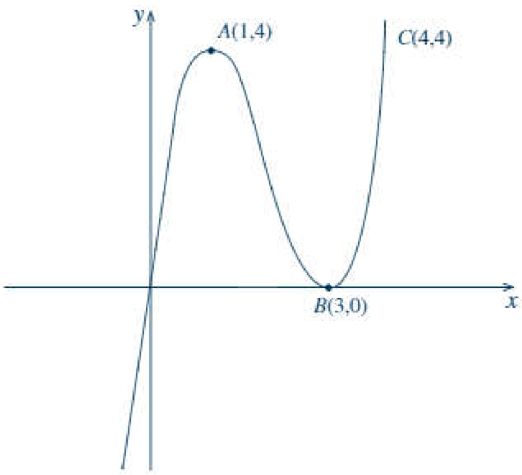
Ejemplos

1 Encuentra los intervalos en los que $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ es creciente o decreciente.

Solución

Al realizar la gráfica de la función dada, se tiene:

x	y
0	0
1	4
2	2
3	0
4	4
5	20
−1	−16
−2	−50



$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y' = (3x - 3)(x - 3) \quad \{ \text{ Resulta que: } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 3.$$

Por lo que los intervalos por analizar son:

a) $(-\infty,1)$

b) $(1,3)$

c) $(3,+\infty)$

En $(-\infty,1)$ tomamos $x = -1$ en la derivada y obtenemos:

$$y' = 3(-1)2 - 12(-1) + 9$$
$$y' = 3 + 12 + 9 = 24$$
$\therefore$ y' es positiva, por lo que la función es creciente.

En $(1,3)$ tomamos $x = 2$ en la derivada para obtener:

$$y' = 3(2)2 - 12(2) + 9$$
$$y' = 12 - 24 + 9 = -3$$
$\therefore$ y' es negativa, por lo que la función es decreciente.

En $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ en la derivada y encontramos que:

$$y' = 3(4)^2 - 12(4) + 9$$
$$y' = 48 - 48 + 9 = 9$$
$\therefore$ y' es positiva, por lo que la función es creciente.

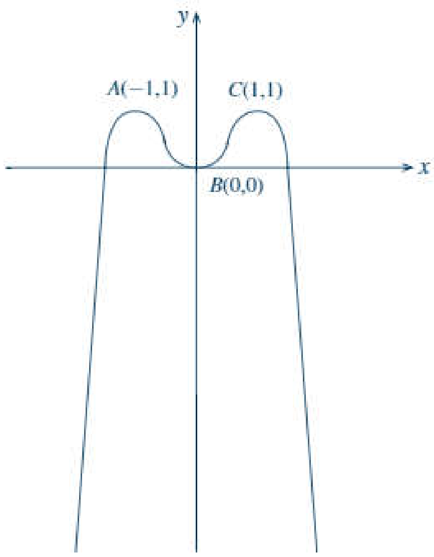
Lo anterior concuerda con las deducciones gráficas.

2 Determina los intervalos en los que $y = 2x^2 - x^4$ es creciente o decreciente.

Solución

Al realizar la gráfica de la función dada, se tiene:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−63	−8	1	0	1	−8	−63



$$y = 2x^2 - x^4$$
$$y' = 4x - 4x^3$$
$$y' = 4x\,(1 - x^2)\ \}\ \text{Al resolver resulta que } x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \pm 1.$$

Por lo que los intervalos por analizar son:

a) $(-\infty,-1)$

b) $(-1,0)$

c) $(0,1)$

d) $(1,+\infty)$

En $(-\infty,-1)$ se toma $x = -2$ en la derivada, lo que resulta:

$$y' = 4(-2) - 4(-2)^3$$
$$y' = -8 + 32 = 24$$
$$\therefore \quad y' \text{ es positiva, por lo que la función es creciente.}$$

En $(-1,0)$ se toma $x = -\dfrac{1}{2}$ en la derivada y tenemos:

$$y' = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$
$$y' = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$\therefore \quad y' \text{ es negativa, por lo que la función es decreciente.}$$

En $(0,1)$ se toma $x = \dfrac{1}{2}$ en la derivada, para obtener:

$$y' = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$y' = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\therefore \quad y' \text{ es positiva, por lo que la función es creciente.}$$

En$(1,+\infty)$ se toma $x = 2$ en la derivada, lo que resulta:

$$y' = 4(2) - 4(2)^3$$
$$y' = 8 - 32 = -24$$
$$\therefore \quad y' \text{ es negativa, por lo que la función es decreciente.}$$

EJERCICIO **18**

I. En las siguientes funciones, determina los intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes y construye las gráficas correspondientes.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $y = 2x - x^2$
2. $y = x^3 - 3x^2$
3. $y = x^4 - 4x^3 + 15$
4. $y = x^3 - 2x^2 + 3x$
5. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$
6. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
7. $y = 1 - x^3$
8. $y = \sqrt[3]{x-1}$
9. $y = x\sqrt{x+1}$
10. $y = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$
11. $y = x^3 - \dfrac{3x^2}{2}$
12. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$
13. $y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}$
14. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$
15. $y = 5 - 2x - x^2$
16. $y = \dfrac{x^2}{6}$
17. $y = (x-1)^2(x+1)^3$
18. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$
19. $y = 2x^3 + x^2 - x + 1$
20. $x^3 + xy + y^2 = 4 - x$
21. $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
22. $y = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$
23. $y = x^4 + 4x$
24. $y = \dfrac{x-2}{x+2}$
25. $y = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Máximo y mínimo de una función (primer método)

Al aplicar la derivada de una función, se determinan los intervalos en que la función es creciente o decreciente, ahora se utilizará para analizar los puntos en que la función pasa de creciente a decreciente o viceversa.

Definición de los máximos y mínimos de una función

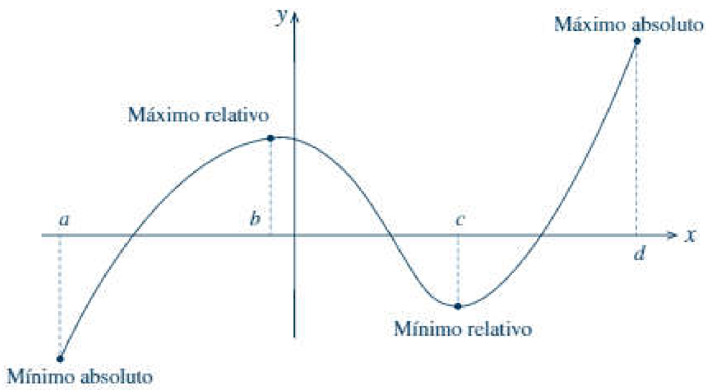
Si f es una función cuyo valor es c, se tiene que:

a) $f(c)$ se llama un **máximo relativo** de f si existe un intevalo (a,b) que contiene a c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo x en dicho intervalo; es decir, si $f(c)$ es mayor que cualquiera de los valores de $f(x)$ que le anteceden o le siguen inmediatamente en el intervalo dado.

b) $f(c)$ se llama un **mínimo relativo** de f si existe un intervalo (a,b) que contiene a c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo x en dicho intervalo; es decir, si $f(c)$ es menor que uno cualquiera de los valores de $f(x)$ que le anteceden o le siguen inmediatamente en el intervalo dado.

De las anteriores definiciones se hace notar que no deben confundirse los **máximos y mínimos relativos** con los puntos máximos o mínimos de la función, que son aquellos donde la ordenada y es mayor o menor en la gráfica, por lo que se denominan **absolutos**.

Ejemplo



La función $f(x)$ en el intervalo $[a,d]$ presenta un valor **mínimo absoluto** en $x = -a$; el valor **máximo absoluto** se presenta en $x = d$; los extremos relativos se presentan en $x = b$ (máximo) y $x = c$ (mínimo).

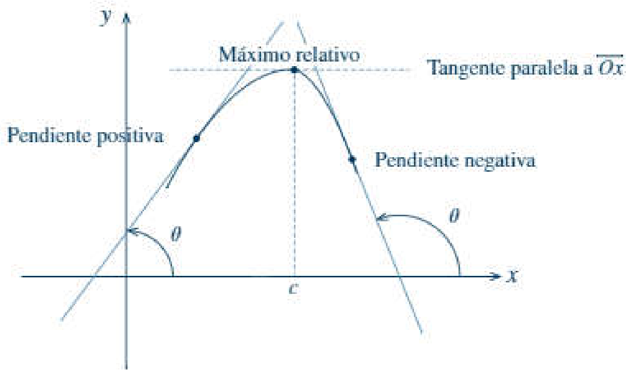
Valor crítico

Si c es un número que está dentro del dominio de una función, entonces a c se le denomina **valor crítico** de la función si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. El valor crítico de una función nos permite analizar si la función tiene un máximo o mínimo relativo.

Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos relativos

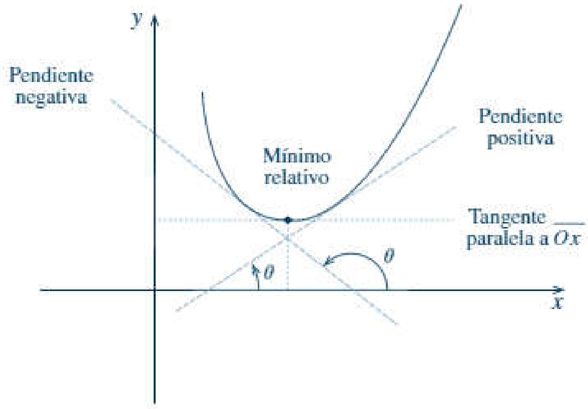
La función $y = f(x)$ presenta un máximo relativo para $x = c$; se observa en la gráfica que antes del máximo la derivada es positiva, es decir, la pendiente es positiva; después del máximo la derivada es negativa, es decir, la pendiente es negativa; como la derivada cambia de positiva a negativa, entonces la función es continua, ya que pasa por cero, dando lugar al siguiente enunciado:

La función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo para $x = c$, donde la derivada para $x = c$ es cero ($f'(c) = 0$) y cambia de signo pasando de positiva o negativa.



Analíticamente, se deduce que la función cambia de creciente a decreciente, o sea, la derivada pasa de positiva a negativa, indicando el máximo relativo. La función $y = f(x)$ presenta un mínimo relativo para $x = c$; se observa en la gráfica que antes del mínimo la derivada es negativa, es decir, la pendiente es negativa; después del mínimo la derivada es positiva, es decir, la pendiente es positiva. Como la derivada cambia de negativa a positiva, entonces la función es continua ya que pasa por cero, dando lugar al siguiente enunciado:

La función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x = c$, donde la derivada para $x = c$ es cero ($f'(c) = 0$) y cambia de signo pasando de negativa a positiva.



El punto de cambio o valor crítico de la función se identifica fácilmente, ya que la tangente a la curva es paralela al eje x.

Si el signo de la derivada no cambia, la función no tiene ni mínimo para el valor crítico que se está analizando.

A continuación presentamos un resumen de lo dicho anteriormente.

Primer método para calcular los máximos y mínimos de una función (pasos a seguir para su solución)

1. Se encuentra la primera derivada de la función dada.

2. Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante determinando las raíces reales o valores críticos de la variable.

3. Se consideran los valores críticos uno por uno, para determinar los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un **poco menor** que el valor crítico y después para un valor un **poco mayor** que él. Si el signo de la derivada es primeramente $(+)$ y después $(-)$, la función presenta un máximo relativo para el valor crítico de la variable que se analiza; en el caso contrario de $(-)$ a $(+)$, se tiene un mínimo relativo. Si el signo de la primera derivada no cambia, la función no presenta ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Solución

a) Se encuentra la primera derivada de la función.

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$
$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = x^2 + x - 2$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante.

$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$
$$x + 2 = 0x - 1 = 0$$
$$\left. x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \right\} \text{ Raíces reales o valores críticos}$$

c) Se analizan los valores críticos uno por uno.

Para $x = -2$

Un valor un poco menor	Un valor un poco mayor
$x = -3$	$x = -1$
$y' = x^2 + x - 2$	$y' = x^2 + x - 2$
$y' = (-3)^2 + (-3) - 2$	$y' = (-1)^2 + (-1) - 2$
$y' = 9 - 3 - 2 = 4$	$y' = 1 - 1 - 2 = -2$
$\therefore\ y' = +$	$\therefore\ y = -$

Máximo

Para $x = -2$, tenemos un máximo cuyo valor es:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$
$$y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2)$$
$$y = -16 + 12 + 24 = 20$$

$\therefore$ Cuando $x = -2$, tenemos un máximo de 20.

Para $x = 1$

Un valor un poco menor	Un valor un poco mayor
$x = 0$	$x = 0$
$y' = x^2 + x - 2$	$y' = x^2 + x - 2$
$y' = (0)^2 + (0) - 2 = -2$	$y' = (0)^2 + (0) - 2 = -2$
$\therefore\ y' = -$	$\therefore\ y' = -$

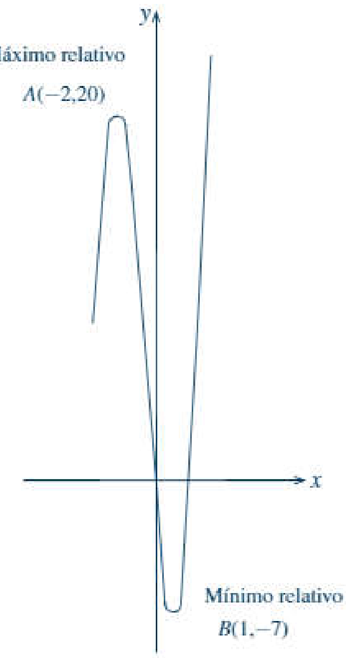
Mínimo

Para $x = 1$, tenemos un mínimo cuyo valor es:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$
$$y = 2\,(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1)$$
$$y = 2 + 3 - 12 = -7$$
$$\therefore \text{ Cuando } x = 1 \text{, tenemos un mínimo de } -7$$

Al realizar la gráfica correspondiente de $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ se tiene:

x	y
–3	9
–2	20
–1	13
0	0
1	–7
2	4
3	45



2 ●●·Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

Solución

a) Se encuentra la primera derivada de la función.

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$$
$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$
$$y' = x^3 - x^2 - 2x$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante.

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x(x-2)\,(x+1) = 0$$
$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 = 0 & x - 2 = 0 & x + 1 = 0 \\ & x^2 = 2 & x_3 = -1 \end{array}\right\} \text{Raíces reales o valores críticos.}$$

c) Analizaremos los valores críticos uno por uno.

Para $x = 0$

Un valor un poco menor

$$x = -\frac{1}{2} = -0.5$$
$$y' = x^3 - x^2 - 2x$$
$$y' = (-0.5)^3 - (-0.5)^2 - 2(-0.5)$$
$$y' = -0.125 - 0.25 + 1 = 0.625$$
$$\therefore \quad y' = \oplus$$

Un valor un poco mayor

$$x = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$y' = x^3 - x^2 - 2x$$
$$y' = (0.5)^3 - (0.5)^2 - 2(0.5)$$
$$y' = 0.125 - 0.25 - 1 = -1.125$$
$$\therefore \quad y' = \ominus$$

Máximo

Para $x = 0$, tenemos un máximo cuyo valor es:

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$$
$$y = 3(0)^4 - 4(0)^3 - 12(0)^2 = 0$$

$\therefore$ Cuando $x = 0$, tenemos un máximo de 0.

Para $x = 2$

Un valor un poco menor

$$x = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$y' = x^3 - x^2 - 2x$$
$$y' = (1.5)^3 - (1.5)^2 - 2(1.5)$$
$$y' = 3.375 - 2.25 - 3 = -1.875$$
$$\therefore \quad y' = \circledcirc$$

Un valor un poco mayor

$$x = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$y' = x^3 - x^2 - 2x$$
$$y' = (2.5)^3 - (2.5)^2 - 2(2.5)$$
$$y' = 15.625 - 6.25 - 5 = 4.375$$
$$\therefore \quad y' = \oplus$$

Mínimo

Para $x = 2$, tenemos un mínimo cuyo valor es:

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$$
$$y = 3(2)^4 - 4(2)^3 - 12(2)^2$$
$$y = 48 - 32 - 48 = -32$$

$\therefore$ Cuando $x = 2$, tenemos un mínimo de -32.

Para $x = -1$

Un valor un poco menor

$$x = -\frac{3}{2} = -1.5$$
$$y' = x^3 - x^2 - 2x$$
$$y' = (1.5)^3 - (-1.5)^2 - 2(-1.5)$$
$$y' = -3.375 - 2.25 + 3 = -2.625$$
$$\therefore \quad y' = \ominus$$

Un valor un poco mayor

$$x = -\frac{1}{2} = -0.5$$
$$y' = x^3 - x^2 - 2x$$
$$y' = (-0.5)^3 - (-0.5)^2 - 2(-0.5)$$
$$y' = -0.125 - 0.25 + 1 = -0.625$$
$$\therefore \quad y' = \oplus$$

Mínimo

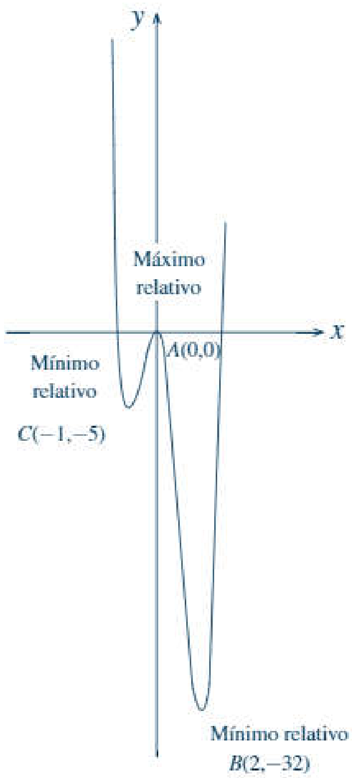
Para $x = 1$, se tiene un mínimo cuyo valor es:

$$y = 3x^4 - 4x^2 - 12x^2$$
$$y = 3(-1)^4 - (-1)^3 - 12(-1)^2$$
$$y = 3 + 4 - 12 = -5$$

$\therefore$ Cuando $x = -1$, el valor mínimo es -5.

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ se tiene:

x	y
−3	243
−2	32
−1	−5
0	0
1	−13
2	−32
3	27



3 Calcula los máximos y mínimos relativos de $y = (2 + x)^2 (1 - x)^2$.

Solución

a) Se encuentra la primera derivada de la función:

$$y = (2+x)^2(1-x)^2$$
$$y' = (2+x)^2(2)(1-x)(-1) + (1-x)^2(2)(2+x)$$
$$y' = (4+4x+x^2)(-2+2x) + (1-2x+x^2)(4+2x)$$
$$y' = -8 - \cancel{8x} - 2x^2 + \cancel{8x} + 8x^2 + 2x^3 + 4 - 8x + \cancel{4x^2} + 2x - \cancel{4x^2} + 2x^3$$
$$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$$
$$y' = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante.

$$2x^2 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$x(2x^2 + 3x - 3) = 2$$
$$x_1 = 2$$
$$2x^2 + 3x - 3 = 2$$
$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$
$$(2x + 5)(x - 1) = 0$$
$$2x + 5 = 0 \quad x - 1 = 0$$
$$2x = -5 \quad x_3 = 1$$
$$x_2 = -\frac{5}{2}$$

c) Se analizan los valores críticos uno por uno.

Para $x = 2$

Un valor un poco menor

$$x = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$y' = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$
$$y' = 2(1.5)^3 + 3(1.5) - 3(1.5) - 2$$
$$y' = 6.75 + 6.75 - 4.5 - 2 = 7$$

Un valor un poco mayor

$$x = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$y' = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$
$$y' = 2(2.5)^3 + 3(2.5)^2 - 3(2.5) - 2$$
$$y' = 31.25 + 18.75 - 7.5 - 2 = 40.5$$

$\therefore\ y' = \oplus$ Dado que no hay cambio de signo, no hay máximo ni mínimo. $\therefore\ y' = \oplus$

Para $x = -\frac{5}{2} = -2.5$

Un valor un poco menor

$$x = -3$$
$$y' = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$
$$y' = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 3(-3) - 2$$
$$y' = -54 + 27 + 9 - 2 = -20$$

Un valor un poco mayor

$$x = -2.25$$
$$y' = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$
$$y' = 2(-2.25)^3 + 3(-2.25)^2 - 3(-2.25) - 2$$
$$y' = -22.71525 + 15.1875 + 6.75 - 2 = -2.84375$$

$\therefore\ y' = \ominus$ Dado que no hay cambio de signo, no hay máximo ni mínimo. $\therefore\ y' = \ominus$

Para $x = 1$

Un valor un poco menor

$x = \frac{1}{2} = 0.5$

$y' = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

$y' = 2(0.5)^3 + 3(0.5)^2 - 3(0.5) - 2$

$y' = 0.25 + 0.75 - 1.5 - 2 = -2.5$

$\therefore \; y' = \ominus$

Un valor un poco mayor

$x = \frac{3}{2} = 1.5$

$y' = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

$y' = 2(1.5)^3 + 3(1.5)^2 - 3(1.5) - 3(1.5) - 2$

$y' = 6.75 + 6.75 - 4.5 - 2 = 7$

$\therefore \; y' = \oplus$

Mínimo

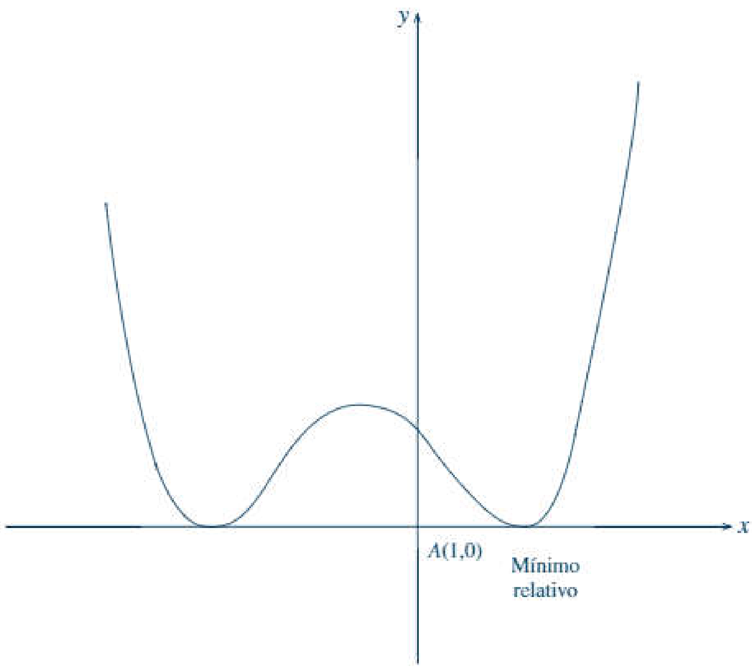
Para $x = 1$ se tiene un mínimo, cuyo valor es:

$$y = (2 + x)^2(1 - x)^2$$
$$y = (2 + 1)^2(1 - 1)^2$$
$$y = (3)^2(0)^2$$
$$y = 0$$

$\therefore$ Existe un mínimo en 0.

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y = (2 + x)^2 (1 - x)^2$ se tiene:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	16	0	4	4	0	16	100



4 ••Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = \dfrac{ax}{x^2 + a^2}$.

Solución

a) Se encuentra la primera derivada de la función.

$$y = \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

$$y' = \frac{(x^2 + a^2)(a) - ax(2x)}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{ax^2 + a^3 - 2ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante.

$$\frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2} = 0$$

$$a^3 - ax^2 = 0$$

$$-ax^2 = -a^3$$

$$x^2 = \frac{-a^3}{-a} = a^2$$

$$\boldsymbol{x = \pm a}$$

c) Se analizan los valores críticos uno por uno.

Para $x = a$

Un valor un poco menor

$$x = \frac{a}{2}$$

$$y' = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - a\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2\right]^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - \frac{a^3}{4}}{\left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{4a^3 - a^3}{4}}{\left(\frac{a^2 + 4a^2}{4}\right)^2}$$

Un valor un poco mayor

$$x = \frac{3a}{2}$$

$$y' = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - a\left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\left[\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + a^2\right]^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - \frac{9a^3}{4}}{\left(\frac{9a^2}{4} + a^2\right)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{4a^3 - 9a^3}{4}}{\left(\frac{9a^2 + 4a^2}{4}\right)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\left(\frac{5a^2}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\frac{25a^4}{16}} \qquad y' = \frac{-\frac{5a^3}{4}}{\left(\frac{13a^2}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{5a^3}{4}}{\frac{169a^4}{16}}$$

$$y' = \frac{48a^2}{100a^4} = \frac{12}{25a} \qquad y' = \frac{-80a^2}{676a^4} = -\frac{20}{169a}$$

$$\therefore \ y' = \oplus \qquad \therefore \ y' = \ominus$$

Máximo

Para $x = a$ se tiene un máximo cuyo valor es:

$$y = \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

$$y = \frac{a(a)}{(a)^2 + a^2} = \frac{\cancel{a^2}}{2\cancel{a^2}}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Existe un máximo en $\frac{1}{2}$.

Para $x = -a$

Un valor un poco menor

$$x = -\frac{3a}{2}$$

$$y' = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - a\left(-\frac{3a}{2}\right)^2}{\left[\left(-\frac{3a}{2}\right)^2 + a^2\right]^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - \frac{9a^2}{4}}{\left(\frac{9a^2}{4} + a^2\right)}$$

$$y' = \frac{\frac{4a^3 - 9a^2}{4}}{\left(\frac{9a^2 + 4a^2}{4}\right)^2}$$

$$y' = \frac{-\frac{5a^3}{4}}{\left(\frac{13a^2}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{5a^3}{4}}{\frac{169a^4}{16}}$$

$$y = \frac{-80a^3}{675a^4} = -\frac{20}{169a}$$

$$\therefore \ y' = \ominus$$

Un valor un poco mayor

$$x = -\frac{a}{2}$$

$$y' = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - a\left(-\frac{a}{2}\right)^2}{\left[\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a^2\right]^2}$$

$$y' = \frac{a^3 - \frac{a^3}{4}}{\left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)}$$

$$y' = \frac{\frac{4a^3 - a^3}{4}}{\left(\frac{a^2 + 4a^2}{4}\right)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\left(\frac{5a^2}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\frac{25a^4}{16}}$$

$$y = \frac{48a^3}{100a^4} = \frac{12}{25a}$$

$$\therefore \ y' = \oplus$$

Mínimo

Para $x = -a$, se tiene un mínimo cuyo valor es:

$$y = \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

$$y = \frac{a(-a)}{(-a)^2 + a^2}$$

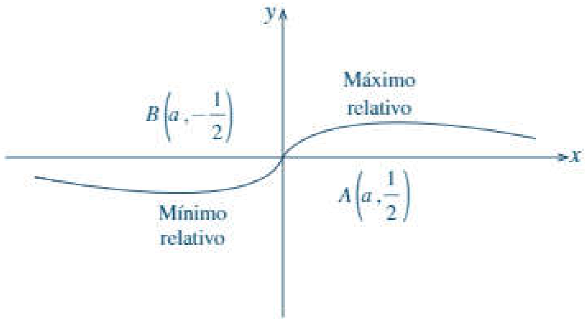
$$y = \frac{a^2}{a^2 + a^2} = \frac{-\cancel{a^2}}{9\cancel{a^2}}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ Existe un mínimo en $-\frac{1}{2}$.

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y = \frac{ax}{x^2 + a^2}$ se tiene:

x	y
$-3a$	$-\frac{3}{10}$
$-2a$	$-\frac{2}{5}$
$-a$	$-\frac{1}{2}$
0	0
a	$\frac{1}{2}$
$2a$	$\frac{2}{5}$
$3a$	$\frac{3}{10}$



EJERCICIO 19

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En equipo, calculen los máximos y mínimos relativos para las siguientes funciones y tracen las gráficas correspondientes y en plenaria discutan sus resultados.

1. $y = 3 + 4x - 2x^2$
2. $y = x^2 + 8x + 10$
3. $y = x^2 - 8x$
4. $y = (x - 1)^2 (x + 2)$
5. $y = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$
6. $y = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$
7. $y = 3x^5 - 5x^4$
8. $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$
9. $y = x^3 - 6x^2 + 15$
10. $y = x^2 + \frac{2a^3}{x}$
11. $y = x^4 - x^2 + 1$
12. $y = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$

13. $y=x^2+\frac{a^4}{x^2}$

14. $y=\frac{x^2}{x+a}$

15. $y=(1-x)^3(2+x)^2$

16. $y=(x+2)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

17. $y=\frac{x+3}{x^2}$

18. $y=(2x-a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{2}{3}}$

19. $y=\frac{x^2+2a^2}{x^2+a^2}$

20. $y=x^4-32x+4$

21. $y=x+\frac{1}{x}$

22. $y=x^4-2x^3$

23. $y=\frac{(x-a)(b-x)}{x^2}$

24. $y=\frac{x^2}{x^2+3}$

25. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$

26. $y=\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

27. $y=\frac{x^2-3x-4}{x-2}$

28. $y=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$

29. $y=\frac{x^2}{x^2-9}$

30. $y=\frac{x}{x+1}$

31. $y=\frac{x^2+x+4}{x^2+2x+4}$

32. $y=\frac{x^5-5x}{5}$

33. $y=\frac{1}{x-2}$

34. $y=\frac{x}{x-2}$

35. $y=2x^3-6x+5$

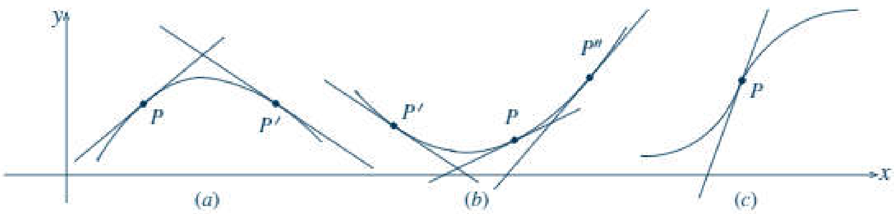
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Puntos de inflexión y sentido de la concavidad de una curva

Al localizar los intervalos en los que la derivada de una función crece o decrece, podemos indicar sobre la gráfica en dónde se curva hacia arriba o hacia abajo; lo anterior se conoce como **concavidad**.

Concavidad en un punto

Si P es el punto que describe una curva, la pendiente de la tangente en dicho punto varía, dando lugar a las siguientes gráficas.



a) Si una curva queda por debajo de sus tangentes, el arco es cóncavo hacia abajo, es decir, hacia la parte negativa del eje y.

b) Si una curva queda por encima de sus tangentes, el arco es cóncavo hacia arriba, es decir, hacia la parte positiva del eje y.

c) Si una curva cambia el sentido de su concavidad en un punto, indica que tiene un punto de inflexión.

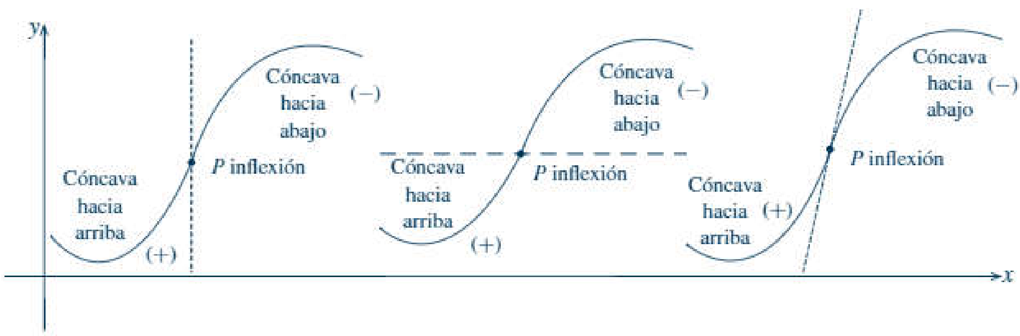
Cuando conocemos la gráfica de una función resulta fácil observar la concavidad de la curva y comprender la siguiente definición: si $y = f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a,b), su gráfica es cóncava hacia arriba en el intervalo si su derivada es creciente en el mismo intervalo; su gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo si su derivada es decreciente en el mismo intervalo.

Criterio para la concavidad

Sea $y = f(x)$ una función cuya gráfica es cóncava hacia arriba si su segunda derivada es positiva ($y'' > 0$) y es cóncava hacia abajo si su segunda derivada es negativa ($y'' < 0$).

Puntos de inflexión

Es aquel que separa los arcos de una curva que tienen su concavidad en sentidos opuestos.



En cada punto de inflexión la recta tangente cruza la curva, por lo que el signo de la segunda derivada cambia en dichos puntos.

Para encontrar los puntos de inflexión se requiere calcular los valores de x para los que la segunda derivada es igual a cero.

Reglas para encontrar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de una curva

1. Se determina la segunda derivada de la función dada.
2. Se iguala a cero la segunda derivada, se resuelve la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.
3. Se analizan los valores de las raíces obtenidas, primero para valores un poco menores y después para valores un poco mayores; si el signo de la segunda derivada cambia, indica la existencia de un punto de inflexión.
   a) Cuando la segunda derivada es positiva, la curva es cóncava hacia arriba (+).
   b) Cuando la segunda derivada es negativa, la curva es cóncava hacia abajo (−).

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad para $y = x^3 - 3x^2 + 3$ y traza su gráfica.

Solución

a) Se determina la segunda derivada de la función.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3$$
$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y'' = x - 1$$

b) Se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve la ecuación resultante.

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

c) Se analiza el valor de la raíz obtenida.

Para $x = 1$

Un valor un poco menor	Un valor un poco mayor
$x = \frac{1}{2} = 0.5$	$x = \frac{3}{2} = 1.5$
$y'' = x - 1$	$y = x - 1$
$y'' = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$	$y'' = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
$\therefore\ y'' = \ominus$	$\therefore\ y'' = \oplus$

Sí hay punto de inflexión.

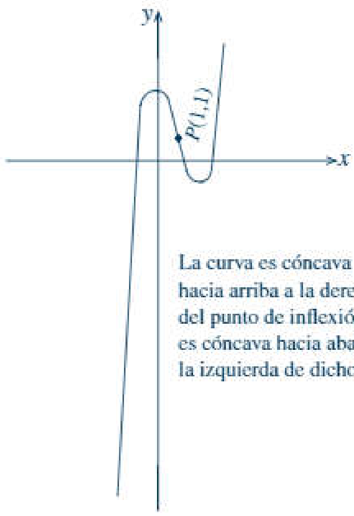
El punto de inflexión es:

$$\left.y = x^3 - 3x^2 + 3\right\} \quad \text{Para } x = 1, \text{ se tiene:}$$
$$y = (1)^3 - 3(1)^2 + 3$$
$$y = 1 - 3 + 3 = 1$$

$\therefore$ Existe un punto de inflexión en (1,1).

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y = x^3 - 3x^2 + 3$, se tiene:

x	y
−3	−51
−2	−17
−1	−1
0	3
1	1
2	−1
3	3



La curva es cóncava hacia arriba a la derecha del punto de inflexión y es cóncava hacia abajo a la izquierda de dicho punto.

2 Determina los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad para $y = x^4 - 4x^3 + 16x$ y traza su gráfica.

Solución

a) Se encuentra la segunda derivada de la función.

$$y = x^4 - 4x^3 + 16x$$
$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 16$$
$$y'' = 12x^2 - 24x$$
$$y'' = x^2 - 2x$$

b) Se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve la ecuación resultante.

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 - 2x = 0 & x = 0 & x - 2 = 0 \\ x(x-2) = 0 & x_1 = 0 & x_2 = 2 \end{array}\right\} \text{Raíces reales o valores críticos}$$

c) Se analizan los valores de las raíces obtenidas.

Para $x = 0$

Un valor un poco menor

$$x = -\frac{1}{2} = -0.5$$
$$y'' = x^2 - 2x$$
$$y'' = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$y'' = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$
$$\therefore\ y'' = \oplus$$

Un valor un poco mayor

$$x = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$y'' = x^2 - 2x$$
$$y'' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$y'' = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ y'' = \ominus$$

Sí hay punto de inflexión.

El punto de inflexión es:

$$y = x^4 - 4x^3 + 16x \ \} \text{ Para } x = 0, \text{ se tiene:}$$
$$y = (0)^4 - 4(0)^3 + 16(0)$$
$$y = 0$$

$\therefore$ Existe un punto de inflexión en (0,0).

Para $x = 2$

Un valor un poco menor

$$x = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$y'' = x^2 - 2x$$
$$y'' = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$y'' = \frac{9}{4} - \frac{6}{2} = \frac{9-12}{4} = -\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ y'' = \ominus$$

Un valor un poco mayor

$$x = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$y'' = x^2 - 2x$$
$$y'' = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$y'' = \frac{25}{4} - \frac{10}{2} = \frac{25-20}{4} = \frac{5}{4}$$
$$\therefore\ y'' = \oplus$$

Sí hay punto de inflexión.

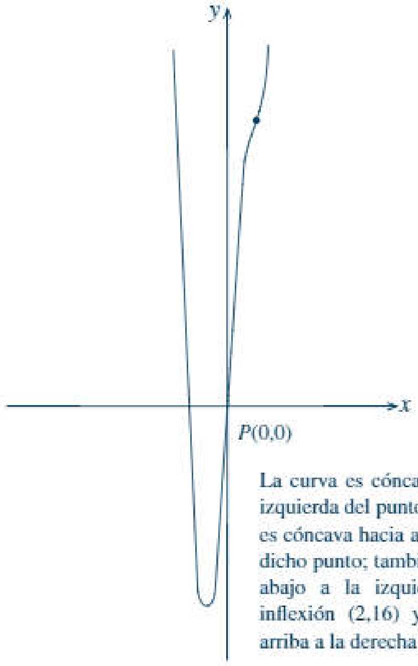
El punto de inflexión es:

$$y = x^4 - 4x^3 + 16x \ \} \text{ Para } x = 2, \text{ se tiene:}$$
$$y = (2)^4 - 4(2)^3 + 16(2)$$
$$y = 16 - 32 + 32 = 16$$

$\therefore$ Existe un punto de inflexión en (2,16).

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y = x^4 - 4x^3 + 16x$ se tiene:

x	y
−3	141
−2	16
−1	−11
0	0
1	13
2	16
3	21



La curva es cóncava hacia arriba a la izquierda del punto de inflexión (0,0) y es cóncava hacia abajo a la derecha de dicho punto; también es cóncava hacia abajo a la izquierda del punto de inflexión (2,16) y es cóncava hacia arriba a la derecha de dicho punto.

3 ●●• Determina los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad para $y = x + \frac{1}{x}$ y traza su gráfica.

Solución

a) Se encuentra la segunda derivada de la función.

$$y = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$y' = \frac{x(2x) - (x^2+1)(1)}{x^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{x^2(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

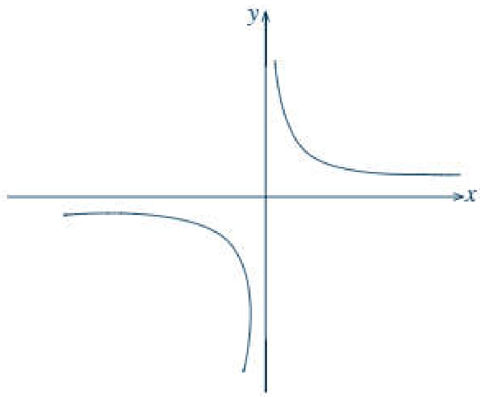
b) Se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve la ecuación resultante.

$$\frac{2}{x^3}=0$$
$$2=x^3(0)$$
$$2=0$$

$\therefore$ La ecuación no tiene raíces reales, por lo que no existen puntos de inflexión.

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y=x+\frac{1}{x}$, se tiene:

x	y
−3	−3.3
−2	−2.5
−1	−2
0	ind
1	2
2	2.5
3	3.3
4	4.25



$\therefore$ La curva en cóncava hacia arriba sólo para los puntos positivos, en el punto (0,0) no está definida.

EJERCICIO 20

I. En equipo de dos personas, determinen los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad para las siguientes funciones y tracen las gráficas correspondientes y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. $y=x^3-9x^2+27x-8$
2. $y=5+3x^2-x^3$
3. $y=x^3-6x^2+12x-8$
4. $y=x^3+1$
5. $y=2x^4-8x+3$
6. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$
7. $y=x\sqrt{x+1}$
8. $y=x^2$
9. $y=5-2x-x^2$
10. $y=12x^2-4x^4$
11. $y=x^2+\frac{1}{x}$
12. $y=x^3-9x^2+24x-7$
13. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$
14. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$
15. $y=x^4-4x^3+2$
16. $y=3x^4-4x^3+1$
17. $y=2+\sqrt[3]{x-4}$
18. $y=2x^3-3x^2-36x+25$
19. $y=x^3-12x$

20. $y=\sqrt{x^2+1}$

21. $y=\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

22. $y=x^4-4x^3+4x^2-4$

23. $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

24. $y=3x^3-2x^2-x+1$

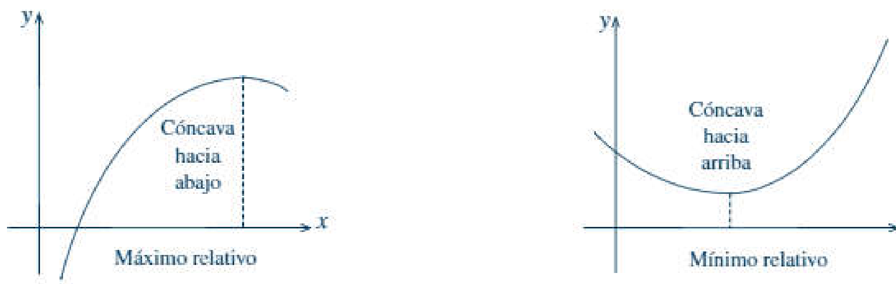
25. $y=x^5-5x$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Máximos y mínimos de una función (segundo método)

Si la segunda derivada de una función existe, se puede utilizar como un criterio simple para encontrar los máximos y mínimos relativos de dicha función, se denomina criterio de la segunda derivada.

Lo anterior se fundamenta en que si $f(c)$ es un máximo relativo de la función diferenciable $y=f(x)$, su gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo que contiene a c; por el contrario, si $f(c)$ es un mínimo relativo, su gráfica es cóncava hacia arriba para el intervalo que contiene a c.



Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos de la función

Una función $y=f(x)$ tiene un máximo relativo si su primera derivada es igual a cero y su segunda derivada es igual a un valor negativo; tendrá un mínimo relativo si su primera derivada es igual a cero y su segunda derivada es igual a un valor positivo.

Segundo método para calcular los máximos y mínimos de una función (pasos a seguir para su solución)

1. Se encuentra la primera derivada de la función dada.
2. Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante, se determina las raíces reales o valores críticos de la variable.
3. Se encuentra la segunda derivada de la función dada.
4. Se sustituye en la segunda derivada cada uno de los valores críticos obtenidos.

Si el valor resultante es negativo, la función presenta un máximo para el valor crítico considerado; si el valor resultante es positivo, la función presenta un mínimo para el valor crítico considerado.

El método anterior no es aplicable si la segunda derivada es igual a cero o no existe; en su lugar se aplica el primer método.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplicando el segundo método, determina los máximos y mínimos relativos para las siguientes funciones:

$$y = x^4 - 4x^2 + 4$$

Solución

a) Se encuentra la primera derivada de la función:

$$y = x^4 - 4x^2 + 4$$
$$y' = 4x^4 - 8x$$
$$y' = x^3 - 2x$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$$x^3 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - 2) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

c) Se encuentra la segunda derivada de la función:

$$y' = x^3 - 2x$$
$$y'' = 3x^2 - 2$$

d) Se analizan de los valores críticos en la segunda derivada.

Para $x = 0$

$$y'' = 3x^2 - 2$$
$$y'' = 3(0)^2 - 2 = -2$$
$$\therefore\ y'' = \ominus \longleftarrow \text{Máximo}$$

Cuando $x = 0$, se tiene un máximo cuyo valor es:

$$y = x^4 - 4x^2 + 4$$
$$y = (0)^4 - 4(0)^2 + 4$$
$$y = 4$$

$\therefore$ Existe un máximo en 4.

Para $x = \pm\sqrt{2}$

$$y'' = 3x^2 - 2$$
$$y'' = 3x\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 2$$
$$y'' = 6 - 2 = 4$$
$$\therefore \quad y'' = \oplus \longleftarrow \text{Mínimo}$$

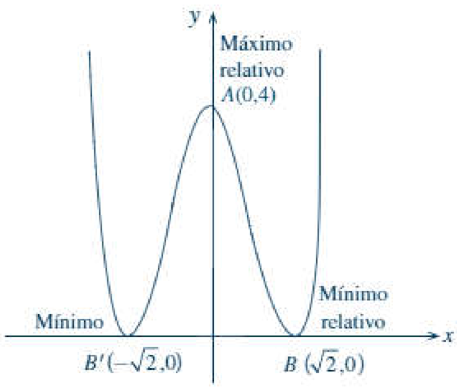
Cuando $x = \pm\sqrt{2}$, se tiene un mínimo cuyo valor es:

$$y = x^4 - 4x^2 + 4$$
$$y = \left(\pm\sqrt{2}\right)^4 - 4\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 + 4$$
$$y = 4 - 8 + 4$$
$$y = 0$$

$\therefore$ Existe un mínimo en 0.

Al eleaborar la gráfica correspondiente de $y = x^4 - 4x^2 + 4$, se tiene:

x	y
0	4
± 1	1
$\pm\sqrt{2}$	0
± 2	4
± 3	49



2 $y = 3x^5 - 20x^3$

Solución

a) Se encuentra la primera derivada de la función:

$$y = 3x^5 - 20x^3$$
$$y' = 15x^4 - 60x^2$$
$$y' = x^4 - 4x^2$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$$x^4 - 4x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 4) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x_2 = \pm 2$$

c) Se encuentra la segunda derivada de la función:

$$y' = x^4 - 4x^2$$
$$y'' = 4x^3 - 8x$$
$$y'' = x^3 - 2x$$

d) Se analizan los valores críticos en la segunda derivada.

Para $x = 0$

$$y'' = x^3 - 2x$$
$$y'' = (0)^3 - 2(0)$$
$$\therefore \quad y'' = 0$$

Como $y'' = 0$, el criterio de la segunda derivada no se aplica.

Para $x = 2$

$$y'' = x^3 - 2x$$
$$y'' = (2)^3 - 2(2)$$
$$y'' = 8 - 4 = 4$$
$$\therefore \quad y'' = \oplus \longleftarrow \text{Mínimo}$$

Cuando $x = 2$, tenemos un máximo, cuyo valor es:

$$y = 3x^5 - 20x^3$$
$$y = 3(2)^5 - 20(2)^3$$
$$y = 96 - 160$$
$$y = -64$$

$\therefore$ Existe un mínimo en -64.

Para $x = -2$

$$y'' = x^3 - 2x$$
$$y'' = (-2)^3 - 2(-2)$$
$$y'' = -8 + 4 = -4$$
$$\therefore \quad y'' = \ominus \longleftarrow \text{Mínimo}$$

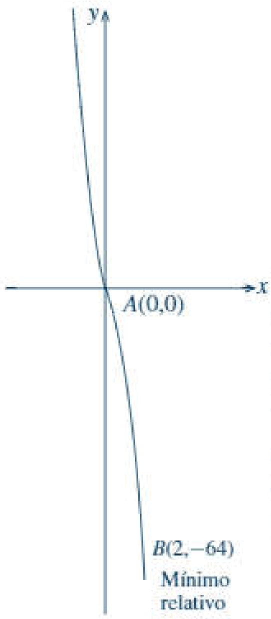
Cuando $x = -2$, tenemos un máximo, cuyo valor es:

$$y = 3x^5 - 20x^3$$
$$y = 3(-2)^5 - 20(-2)^3$$
$$y = -96 + 160$$
$$y = 64$$

$\therefore$ Existe un máximo en 64.

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y = 3x^5 - 20x^3$, se tiene:

x	y
−2	64
−1	17
0	0
1	−17
2	−64



En este punto el criterio de la segunda derivada no es aplicable, por lo que se recomienda emplear el criterio de la primera derivada o primer método.

3 $y = x^2 + \dfrac{2a^3}{x}$

Solución

a) Se encuentra la primera derivada de la función:

$$y = x^2 + \frac{2a^3}{x} = \frac{x^3 + 2a^3}{x}$$
$$y' = \frac{x(3x^2) - (x^3 + 2a^3)(1)}{x^2}$$
$$y' = \frac{3x^3 - x^3 - 2a^3}{x^2} = \frac{2x^3 - 2a^3}{x^2}$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{2x^3-2a^3}{x^2}=0$$
$$2x^3-2a^3=x^2(0)$$
$$2x^3=2a^3$$
$$x^3=\frac{\cancel{2}a^3}{\cancel{2}}$$
$$x=a$$

c) Se encuentra la segunda derivada de la función:

$$y'=\frac{2x^3-2x^3}{x^2}$$
$$y''=\frac{x^2(6x^2)-(2x^3-2a^3)(2x)}{(x^2)^2}$$
$$y''=\frac{6x^4-4x^4+4a^3x}{x^4}=\frac{2x^4+4a^3x}{x^4}$$
$$y''=\frac{\cancel{x}(2x^3-4a^3)}{\cancel{x^4}}=\frac{2x^3+4a^3}{x^3}$$

d) Se analizan los valores críticos en la segunda derivada.

Para $x=a$

$$y''=\frac{2x^3+4a^3}{x^3}$$
$$y''=\frac{2(a)^3+4a^3}{(a)^3}=\frac{2a^3+4a^3}{a^3}$$
$$y''=\frac{6\cancel{a^3}}{\cancel{a^3}}=6$$
$$\therefore\quad y''=\oplus \longleftarrow \text{Mínimo}$$

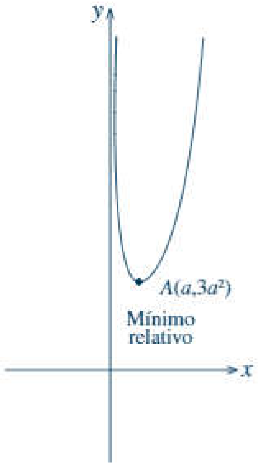
Cuando $x=a$, tenemos un mínimo, cuyo valor es:

$$y=x^2+\frac{2a^3}{x}$$
$$y=(a)^2+\frac{2a^3}{a}$$
$$y=a^2+2a^2=3a^2$$

$\therefore$ Existe un mínimo en $3a^2$.

Al elaborar la gráfica correspondiente de $y = x^2 + \dfrac{2a^3}{x}$, se tiene:

x	y
0	∞
a	$3a^2$
2a	$5a^2$
3a	$9.6a^2$



EJERCICIO 21

I. En grupo y con asesoría de su profesor, determinen por el segundo método los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones y tracen la gráfica correspondiente, concluyan los pasos del proceso de solución.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. $y = (x-4)^4(x+3)^3$
2. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
3. $y = (x^2 - 4)^2$
4. $y = \sqrt{25 - 4x^2}$
5. $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$
6. $y = x^4 - 6x + 2$
7. $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$
8. $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$
9. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$
10. $y = x(12 - 2x)^2$
11. $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
12. $y = x^2 - 4x + 2$
13. $y = 6x - x^2 - 1$
14. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$
15. $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$
16. $y = x^2 - \dfrac{a^4}{x^2}$
17. $y = \dfrac{ax}{a^2 + x^2}$
18. $y = 2x^3 - 3ax^2 + a^3$
19. $y = x^2(x-4)^2$
20. $y = 12x + 9x^2 - 4x^3$
21. $y = x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$
22. $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$
23. $y = x(6-x)^2$

24. $x^2 + 3xy + y^2 = 0$
25. $x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y = 0$
26. $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x = 0$
27. $3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y = 0$
28. $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 4x = 0$
29. $x^3 - y^3 + 3xy = 0$
30. $\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + xy = 0$

II. Determina lo que se pide para cada una de las funciones y en plenaria discute tus resultados.

a) El carácter creciente y decreciente.

b) Los máximos y mínimos relativos (primer método).

c) Puntos de inflexión y sentido de la concavidad.

d) Los máximos y mínimos relativos (segundo método).

e) Las ecuaciones de la tangente y normal; las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal en cada valor crítico.

1. $y = 4x^3 - x$
2. $y = \frac{4}{1+x^2}$
3. $y = (x-3)(x+2)^3$
4. $y = x^3 + x + \frac{4}{x}$
5. $y = x\sqrt{16 - x^2}$
6. $y = 3x - x^3 - 2$
7. $y = x^4 - 4x^3 + 16x$
8. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$
9. $y = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$
10. $y = x^3 - 6x^2 + 15$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

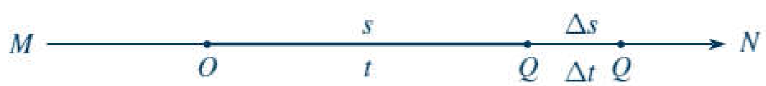
Velocidad y aceleración en un movimiento rectilíneo

Una aplicación de la primera y segunda derivadas en términos de la **razón de cambio** se manifiesta en el **movimiento rectilíneo.**

Para los cuerpos que presentan un movimiento rectilíneo, se acostumbra emplear una recta horizontal con un punto fijo llamado **origen**; hacia la derecha de dicho punto el movimiento se considera positivo y hacia la izquierda, negativo.

Ecuación de la posición. Es aquella que indica la posición de un cuerpo con relación al punto fijo (origen) y que se encuentra en función del tiempo.

Si consideramos el movimiento de un cuerpo Q sobre la recta MN y sea s la distancia medida del origen a una posición cualquiera de Q, el tiempo en que transcurre dicho movimiento se representa como (t).



Por cada valor de t le corresponde una posición a Q y por consiguiente una distancia s; por tanto, la distancia es una función del tiempo $s = f(t)$. Si a t se le da un incremento Δt, también s tendrá un incremento Δs.

Velocidad media

Expresa la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo en un intervalo de tiempo, es decir:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{Velocidad media}$$

Velocidad instantánea

Es la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo en instante determinado, es decir, si un cuerpo se mueve con movimiento uniforme (velocidad constante), dicha razón tendrá un mismo valor para todo el intervalo de tiempo.

A la velocidad instantánea se le denomina simplemente **velocidad** v, en el instante t y se define como: el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\text{Velocidad } (v) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

La derivada del espacio con respecto al tiempo es la velocidad en un instante cualquiera.

EJEMPLO

Ejemplo

1 Un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación $s = t^3 - 3t^2 + 4$, calcula:
a) La velocidad instantánea.
b) La velocidad cuando t es un segundo.
c) La velocidad a 3 segundos.
d) ¿Cuándo es la velocidad igual a cero?

Solución

a) Al derivar la ecuación dada se tiene:

$$s = t^3 - 3t^2 + 4$$
$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t$$

$\therefore$ La ecuación de la velocidad instantánea es $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t$

b) Para calcular la velocidad cuando t es igual a un segundo se tiene:

$$v = 3t^2 - 6t$$
$$v = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6$$
$$v = -3\frac{m}{s}$$

$\therefore$ En este caso el objeto se mueve a la izquierda de un punto fijo llamado origen.

c) Se determina la velocidad cuando t es igual a 3 s.

$$v = 3t^2 - 6t$$
$$v = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18$$
$$v = 9 \text{ m/s}$$

$\therefore$ El objeto se mueve a la derecha de un punto fijo llamado origen.

d) Calculamos $v = 0$.

$$3t^2 - 6t = 0$$
$$3t(t-2) = 0$$
$$t_1 = 0 \quad t_2 = 2$$

$\therefore$ La velocidad es cero cuando t es igual a 0 s y cuando t es igual a 2 s.

Relación entre la rapidez de variación de variables relacionadas

En este tipo de problemas intervienen variables que están en función del tiempo; mediante la derivación es posible encontrar la relación entre la rapidez de variación de las variables. A continuación describiremos el procedimiento para ello.

1. Elabora una gráfica interpretativa del problema y representa como w, x, y, z las cantidades que varían con respecto al tiempo.
2. Encuentra la relación entre las variables que intervienen y que se efectúan en un instante cualquiera.
3. Deriva la expresión resultante con respecto al tiempo.
4. Enlista los datos dados y las incógnitas buscadas.
5. Sustituye en la expresión resultante del tercer paso los datos dados, resuelve con respecto a las incógnitas buscadas.

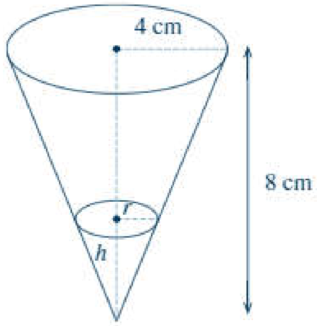
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Un vaso de papel en forma de cono se llena con agua a razón de $2\text{cm}^3/\text{s}$. Si la altura del vaso es 8 cm y el radio de la base es 4 cm, ¿con qué rapidez sube el nivel del líquido cuando el nivel es de 3 cm?

Solución

a) Se traza la gráfica interpretativa del problema.



El volumen de agua en el recipiente es la fórmula del volumen del cono, es decir:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

h = profundidad del agua
r = radio de la superficie del agua, en el instante t.

b) Se forman dos triángulos semejantes, es decir:

$$\frac{r}{4\text{ cm}} = \frac{h}{8\text{ cm}}$$

$$\left.r = \frac{(4\ \cancel{\text{cm}})(h)}{8\text{ cm}} = \frac{h}{2}\right\}\text{ Sustituyendo en la ecuación del volumen, resulta:}$$

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h^2}{4}\right)$$

$$\therefore\ v = \frac{1}{12}\pi\, h^3$$

c) Se deriva con respecto al tiempo:

$$v = \frac{1}{12}\pi\, h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{12}\,\pi\,(3\,h^2)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3}{12}\,\pi\, h^2\,\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\,\pi\, h^2\,\frac{dh}{dt}$$

d) Se enlistan los datos dados e incógnitas buscadas.

$$\frac{dv}{dt} = 2\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

h = altura en cm del nivel del agua (3 cm)

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

e) Al sustituir en la derivada, se tiene:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

$$2\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}=\frac{1}{4}(3.1416)(3\text{ cm})^2\frac{dh}{dt}$$

$$2\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}=7.0685\text{ cm}^2\frac{dh}{dt}$$

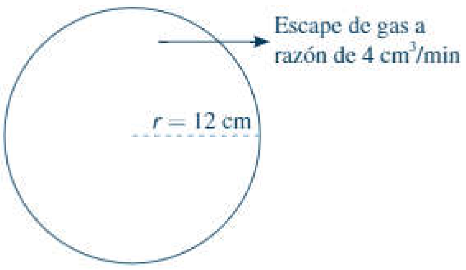
$$\frac{dh}{dt}=\frac{2\frac{\text{cm}\cancel{^3}}{\text{s}}}{7.0685\ \cancel{\text{cm}^2}}=0.2829\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$\therefore$ Cuando el nivel del agua es de 3 cm, esté sube a razón de 0.2829 cm/s.

2 ●●• Un gas escapa de un globo esférico a razón de 4 cm^3 por minuto; cuando el radio es de 12 cm, ¿qué tan rápido disminuye su superficie en la unidad de tiempo?

Solución

a) Se traza la gráfica interpretativa del problema.



El volumen de la esfera $v=\frac{4}{3}\pi r^3$

La superficie de la esfera $A=4\pi r^2$.

r es el radio de la esfera (12 cm) en un instante t.

b) Derivamos el volumen y el área de la esfera con respecto al tiempo.

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{4}{\cancel{3}}\pi(\cancel{3}r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$A=4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt}=4\pi(2r)\ \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=8\pi r\ \frac{dr}{dt}$$

c) Al escapar el gas, el volumen disminuye y también la superficie de la esfera.

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dv}{dt}}=\frac{8\pi r}{4\pi r^2}=\frac{2}{r}$$

$$\therefore\ \frac{dA}{dt}=\frac{2}{r}\frac{dv}{dt}$$

d) Relacionamos los datos dados con incógnitas buscadas.

$$r = 12 \text{ cm}$$
$$\frac{dv}{dt} = 4\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$
$$\frac{dA}{dt} = ?$$

e) Sustituimos en la derivada.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{r}\ \frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{2}{12\cancel{\text{cm}}}\right)\left(-4\frac{\text{cm}^{\cancel{3}}}{\text{min}}\right)$$
$$\frac{dA}{dt} = -0.666\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$$

∴ La superficie de la esfera disminuye a razón de 0.666 cm^2/min, es decir, 0.0111 cm^2/s.

3 ●●• Un tren corre hacia el Norte a una velocidad de 60 km/h, otro hacia el Oeste a una velocidad de 80 km/h. Si a las cuatro de la madrugada el segundo cruzó la ruta del primero en el punto por el que éste había pasado dos horas antes, calcula:

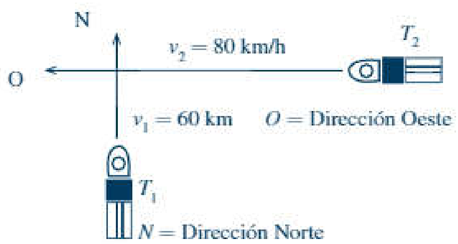
a) ¿Cómo variaba la distancia entre los trenes a las tres de la madrugada?

b) ¿Cómo variaba la distancia entre los trenes a las cinco de la madrugada?

c) ¿Cuándo no variaba la distancia entre ellos?

Solución

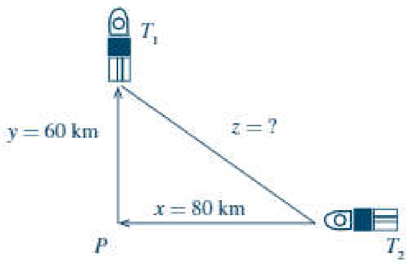
1) Se traza la gráfica interpretativa del problema.



T_1 = Tren que corre hacia el Norte a una velocidad (v_1) de 60 km/h.

T_2 = Tren que corre hacia el Oeste a una velocidad (v_2) de 80 km/h.

2) Al graficar con base en la pregunta del inciso a:



A las tres de la madrugada el tren (T_1) se encuentra a 60 km del punto de cruce (P), es decir, se aleja; mientras que el tren (T_2) se encuentra a 80 km de dicho punto, es decir, se acerca. Sea z la variación entre los trenes en dicho instante.

3) De acuerdo con la gráfica, tenemos un triángulo rectángulo; por el teorema de Pitágoras se verifica la siguiente relación.

$$(\mathrm{HIP})^2 = (\mathrm{OP})^2 + (\mathrm{ADY})^2$$
$$z^2 = y^2 + x^2$$

4) Derivamos la expresión resultante con respecto al tiempo.

$$z^2 = y^2 + x^2$$
$$2z\frac{dz}{d} = 2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\cancel{2}\left(y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt}\right)}{\cancel{2}z}$$
$$\therefore \quad \frac{dz}{dt} = \frac{y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt}}{z}$$

5) Relacionamos los datos dados con las incógnitas buscadas.

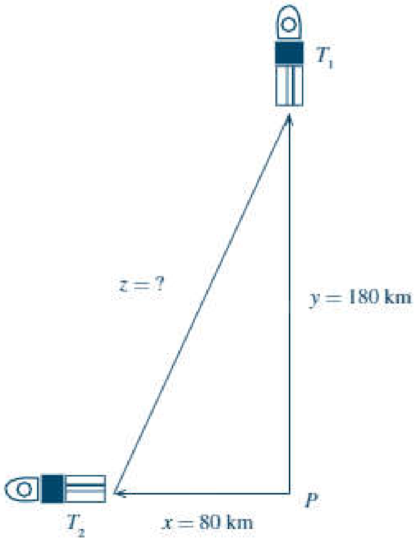
$$x = -80 \text{ km}$$
$$y = 60 \text{ km}$$
$$\frac{dx}{dt} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$\frac{dy}{dx} = 60 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$z = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{(60)^2 + (-80)^2} = \sqrt{10\ 000} = 100 \text{ km}$$
$$\frac{dz}{dt} = ?$$

6) Sustituimos en la derivada.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt}}{z} = \frac{(60 \text{ km})\left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + (-80 \text{ km})\left(80\frac{\text{km}}{h}\right)}{100 \text{ km}}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{3600\frac{\text{km}^2}{\text{h}}}{100 \text{ km}} = \frac{-2800\frac{\text{km}^2}{\text{h}}}{100\ \cancel{\text{km}}} = -28\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$\therefore$ La distancia entre los trenes a las tres de la madrugada disminuye en 28 km/h.

7) Graficamos con base a la pregunta del inciso b.



A las cinco de la madrugada, el tren (T_1) se encuentra a 180 km del punto de cruce (P), es decir, se aleja; el tren (T_2) se encuentra a 80 km de dicho punto y también se aleja.

Sea z la variación entre los trenes en dicho instante.

8) De acuerdo con la gráfica, tenemos un triángulo rectángulo; por el teorema de Pitágoras se verifica la siguiente relación.

$$(\text{HIP})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2$$
$$z^2 = y^2 + x^2$$

9) Derivamos la expresión resultante con respecto al tiempo.

$$z^2 = y^2 + x^2$$
$$2z\frac{dz}{dt} = 2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\cancel{2}\left(y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt}\right)}{\cancel{2}z}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt}}{z}$$

10) Relacionamos los datos dados con las incógnitas buscadas.

$$x = 80 \text{ km} \qquad \frac{dy}{dt} = 60 \text{ km/h}$$
$$y = 180 \text{ km} \qquad z = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{(180)^2 + (80)^2} = \sqrt{38800} = 196.97 \text{ km}$$
$$\frac{dx}{dt} = 80 \text{ km/h} \qquad \frac{dz}{dt} = ?$$

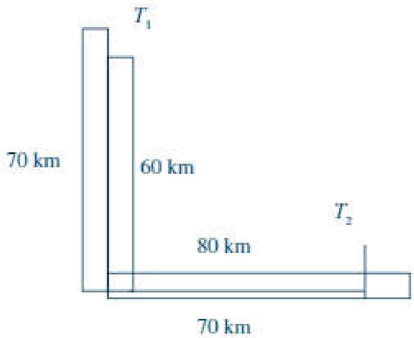
11) Sustituimos en la derivada.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{y\frac{dy}{dt}+x\frac{dx}{dt}}{z}=\frac{(180\text{ km})(60\text{ km/h})+(80\text{ km})(80\text{ km/h})}{196\,97\text{ km}}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{10800\text{ km}^2\text{/h}+6400\text{ km}^2\text{/h}}{19697\text{ km}}=\frac{17200\text{ km}^2\text{/h}}{196\,97\cancel{\text{ km}}}=8732\text{ km}^2\text{/h}$$

$\therefore$ La distancia entre los trenes a las cinco de la madrugada, aumenta en 87.32 km/h.

12) Graficamos con base en la pregunta del inciso *c*.



A las tres de la madrugada el tren (T_1) se encuentra a 60 km después del punto de cruce; el tren (T_2) se encuentra a 80 km antes del mismo punto.

Cuando no varía la distancia entre los trenes ambos se encuentran a 70 km del punto de cruce.

Se observa que el tren (T_1) avanza 10 km y el tren (T_2) retrocede 10 km, ambos en el mismo instante.

Mediante la siguiente relación, obtendremos el tiempo requerido por ambos trenes para cambiar 10 km de sus posiciones que tenían a las tres de la madrugada.

$$\begin{aligned} \text{Si } 60\text{ km} &\rightarrow 1\text{ h}\\ 10\text{ km} &\rightarrow t \end{aligned}$$

$$t=\frac{(10\text{ km})(1\text{ h})}{60\text{ km}}=0.166\approx 0.17\text{ h}$$

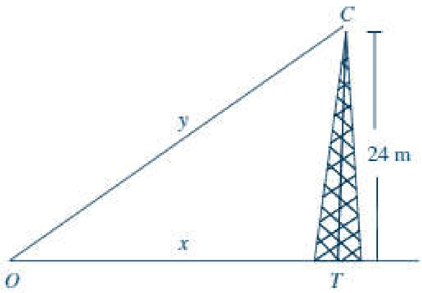
Si sumamos los tiempos se tiene que 3 de la madrugada más 0.17 h, dan un total de 3.17 horas de la madrugada.

$\therefore$ La distancia entre los trenes no varía cuando son las 3.17 horas de la madrugada.

4 ●●• Un obrero se dirige a $9\frac{3}{4}$ km por hora hacia la base de una torre de perforación que tiene 24 m de alto. ¿Con qué rapidez se acerca a la cima de la torre cuando la distancia de la base es de 30 m?

Solución

a) Se traza la gráfica interpretativa del problema.



$\overline{OT} = x$
Distancia entre el obrero y la base de la torre

$\overline{OC} = y$
Distancia entre el obrero y la cima de la torre en un instante cualquiera

b) Con base en la gráfica, tenemos un triángulo rectángulo; por el teorema de Pitágoras se verifica la siguiente relación.

$$(\text{HIP})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2$$
$$y^2 = (24)^2 + x^2$$
$$y^2 = 576 + x^2$$

c) Derivamos la expresión resultante con respecto al tiempo.

$$y^2 = 576 + x^2$$
$$2y\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(576) + x^2\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y}\,\frac{dx}{dt}$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\,\frac{dx}{dt}$$

d) Relacionamos los datos dados con las incógnitas buscadas.

$$x = 30 \text{ m}$$
$$\frac{dx}{dt} = 9\frac{3}{4}\ \text{km/h} = -9750\ \text{m/h}$$
$$y = \sqrt{576 + x^2} = \sqrt{576 + (3)^2} = \sqrt{1476} = 38.418 \text{ m}$$
$$\frac{dy}{dt} = ?$$

e) Sustituimos en la derivada.

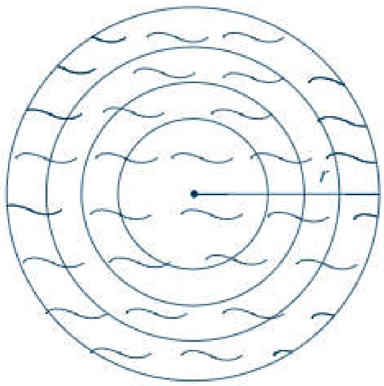
$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\,\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{30\ \cancel{m}}{38.418\ \cancel{m}}\right)(-9750 \text{ m/h})$$
$$\frac{dy}{dt} = -7613.47 \text{ m/h} = -7.61347 \text{ km/h}$$

$\therefore$ El obrero se acerca a la cima de la torre con una rapidez de 7.61347 km/h, cuando su distancia de la base es de 30 m.

5 ●●• A un estanque de agua en completa calma, se tira una piedra que provoca la formación de ondas circulares concéntricas; cada onda se aleja del centro a una velocidad de 20 cm/s, ¿con qué velocidad aumenta la superficie total del agua perturbada al cabo de 8 s?

Solución

a) Se traza la gráfica interpretativa del problema:



El área o superficie del círculo, tiene por fórmula $A = \pi r^2$.

$r =$ Es el radio de la onda mayor.

b) Al derivar el área con respecto al tiempo, tenemos:

$$A = \pi r^2$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

c) Relación de datos e incógnitas buscadas:

$r =$ es el radio de la onda mayor, es decir, en el instante

$t =$ 8 s, tenemos que $r = (20 \text{ cm} \cdot \text{m/s})(8 \text{ s}) = 160 \text{ cm}$

$\frac{dr}{dt} =$ es el radio de una onda que aumenta a una velocidad de 20 cm/s.

$\frac{dA}{dt} =$?

d) Al sustituir en la derivada, se tiene:

$$\frac{dA}{dt} = 2\,\pi r\,\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\,(3.1416)(160 \text{ cm})(20 \text{ cm/s})$$
$$\frac{dA}{dt} = 20106.192 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$\therefore$ La superficie total del agua perturbada al cabo de 8 s, aumenta a razón de $20106.192 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Aceleración en un movimiento rectilíneo

Siendo la velocidad la razón de cambio de la posición de un cuerpo, nos preguntamos: ¿cuál es la razón de cambio de la velocidad? Si la velocidad en el movimiento rectilíneo se define como la rapidez de variación de la distancia con respecto al tiempo $v = \frac{ds}{dt}$.

Si la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo es: $\frac{d(v)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

La segunda derivada $\frac{d^2s}{dt^2}$ se denomina **aceleración** y se define como:

La rapidez de variación de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\text{aceleración} = a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Basándonos en los criterios para las funciones crecientes y decrecientes, en el primer y segundo métodos para determinar los máximos y mínimos de una función, tenemos los siguientes criterios que se aplican para un instante $t = t_0$.

1. Si $a > 0$, v aumenta (algebraicamente).
2. Si $a < 0$, v disminuye (algebraicamente).
3. Si $a > 0$, y la $v = 0$, s tiene un valor mínimo.
4. Si $a < 0$, y la $v = 0$, s tiene un valor máximo.
5. Si $a = 0$ y cambia de signo de $(+)$ a $(-)$, cuando t pasa por t_0, por lo tanto la velocidad (v) presenta un valor máximo para $t = t_0$.
6. Si $a = 0$ y cambia de signo de $(-)$ a $(+)$, cuando t pasa por t_0, por lo tanto la velocidad (v) presenta un valor mínimo para $t = t_0$.
7. Si a y v tienen igual signo, la cantidad de velocidad de un cuerpo (Q) aumenta.
8. Si a y v tienen signos contrarios, la cantidad de velocidad de un cuerpo (Q) disminuye.

Para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la aceleración es constante; por lo que si un cuerpo cae libremente en el vacío, partiendo del reposo a la superficie de la tierra, lo hace de acuerdo a la ley $s = 4.9t^2$ de donde resulta:

$$v = \frac{ds}{dt} = 9.8t$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Nota: El movimiento de caída libre de un cuerpo se obtiene de la ecuación: $s = \frac{1}{2}\, gt^2$, donde g representa la gravedad terrestre (9.8 m/s^2), la velocidad se obtiene de $v = gt$ y la aceleración de $a = g$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo está dada por la ecuación $s = t^3 - t + \frac{1}{2}$, determina su velocidad y aceleración en:

a) Un instante cualquiera.

b) Un instante de $t = 2$ s.

c) Un instante de $t = 4$ s.

Solución

a) Para un instante cualquiera:

$$s = t^3 - t + \frac{1}{2} \qquad\qquad v = 3t^2 - 1$$

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 1 \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = 6t$$

$$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt}(3t^2 - 1) \text{ m/s} \qquad\qquad \therefore \quad a = \frac{dv}{dt}\ 6t \text{ m/s}$$

b) Cuando $t = 2$ s, se tiene:

$$v = 3t^2 - 1 \qquad\qquad a = 6t$$

$$v = 3(2)^2 - 1 = 12 - 1 \qquad\qquad a = 6(2)$$

$$\therefore \quad v = 11 \text{ m/s} \qquad\qquad \therefore \quad a = 12 \text{ m/s}^2$$

c) Cuando $t = 4$ s, se tiene:

$$v = 3t^2 - 1 \qquad\qquad a = 6t$$

$$v = 3(4)^2 - 1 = 48 - 1 \qquad\qquad a = 6(4)$$

$$\therefore \quad v = 47 \text{ m/s} \qquad\qquad \therefore \quad a = 24 \text{ m/s}^2$$

2 Para las siguientes ecuaciones de movimientos rectilíneos, calcula el espacio recorrido, la velocidad y la aceleración en el instante indicado.

a) $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$, para $t = 3$ s.

Solución

$$s = t^3 - 6t^2 + 9 + 4 \qquad\qquad v = 3t^3 12t^2 + 9$$

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

Si $t = 3$ s, se tiene: Si $t = 3$ s, se tiene:

$$v = \frac{ds}{dt} 3\ (3)^2 - 12(3) + 9 \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt} 6(3)^2 - 12$$

$$v = 27 - 36 + 9 \qquad\qquad a = 18 - 12$$

$$\therefore \quad v = 0 \text{ m/s}^2 \qquad\qquad \therefore \quad a = 6 \text{ m/s}^2$$

Para $t = 3$ s, tenemos:

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$$
$$s = (3)^3 - 6\,(3)^2 + 9(3) + 4$$
$$s = 27 - 54 + 27 + 4$$
$$\therefore \quad s = 4 \text{ m}$$

b) $s = 120t - 16t^2$, para $t = 6$ s.

Solución

$$s = 120t - 16t^2$$
$$\frac{ds}{dt} = 120 - 32t$$

$$v = 120t - 32t$$
$$\frac{dv}{dt} = -32$$
$$\therefore \quad a = -32 \text{ m/s}$$

Si $t = 6$ s, tenemos:

$$v = \frac{ds}{dt}120 - 32(6)$$
$$v = 120 - 192$$
$$\therefore \quad v = -72 \text{ m/s}$$

Para $t = 6$ s, tenemos:

$$s = 120t - 16t^2$$
$$s = 120(6) - 16(6)^2 = 720 - 576$$
$$\therefore \quad s = 144 \text{ m}$$

c) $s = \sqrt{2t} + \dfrac{4}{\sqrt{2t}}$, para $t = 4$ s.

Solución

$$s = \sqrt{2t} + \frac{4}{\sqrt{2t}}$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(2t)^{\frac{1}{2}}} + \left[-\frac{4}{\left(\sqrt{2t}\right)^2}\;\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2t}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2t}} - \frac{4}{2t}\left[\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(2t)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2t}} - \frac{2}{t\sqrt{2t}} = \frac{t-2}{t\sqrt{2t}}$$

Si $t = 4$ s, tenemos:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{t-2}{t\sqrt{2t}} = \frac{4-2}{2\sqrt{2(4)}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{8}} = 0.3535 \text{ m/s}$$
$$v = \frac{t-2}{t\sqrt{2t}}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{t\sqrt{2t}(1)-(t-2)\left[\frac{t}{\sqrt{2t}}+\sqrt{2t}\right]}{\left(t\sqrt{2t}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2t}-(t-2)\left[\frac{t+2t}{\sqrt{2t}}\right]}{t^2\sqrt{2t}}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{t\sqrt{2t}-(t-2)\left(\frac{3t}{\sqrt{2t}}\right)}{2t^3}=\frac{t\sqrt{2t}+\frac{6t-3t^2}{\sqrt{2t}}}{2t^3}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\frac{t(2t)+6t-3t^2}{\sqrt{2t}}}{2t^3}=\frac{6t-t^2}{2t^3\sqrt{2t}}$$

Si $t=4$ s, tenemos:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{6t-t^2}{2t^3\sqrt{2t}}=\frac{6(4)-(4)^2}{2(4)^3\sqrt{2(4)}}=\frac{24-16}{128\sqrt{8}}=\frac{8}{128\sqrt{8}}$$

$$\therefore \quad a=0.0220 \text{ m/s}^2$$

Para $t=4$ s, tenemos:

$$s=\sqrt{2t}+\frac{4}{\sqrt{2t}}$$

$$s=\sqrt{2(4)}+\frac{4}{\sqrt{2(4)}}=\sqrt{8}+\frac{4}{\sqrt{8}}=4.242 \text{ m}$$

3 ••Calcula el espacio recorrido y la aceleración en el instante en que la velocidad se anula por primera vez, para las siguientes funciones.

a) $s=16t^2-64t+64$

Solución

Primero se deriva la función s lo que resulta: $\frac{ds}{dt}=32t-64$

Si $v=\frac{ds}{dt}=0$, tenemos:

$$32t-64=0$$

$$32t=64$$

$$t=\frac{64}{32}=2 \text{ s}$$

Para $t=2$ s, tenemos:

$$s=16t^2-64t+64$$

$$s=16(2)^2-64(2)+64$$

$$s=64-128+64$$

$$\therefore \quad s=0 \text{ m}$$

$$v=32t-64$$

$$\frac{dv}{dt}=32$$

$$\therefore \quad a=\frac{dv}{dt}=32 \text{ m/s}^2$$

b) $s = 48t - t^3$

Solución

Primero se deriva la función s lo que resulta: $\frac{ds}{dt} = 48 - 3t^2$

$$s = 48t - t^3$$
$$\frac{ds}{dt} = 48 - 3t^2$$
$$\text{Si } v = \frac{ds}{dt} = 0, \text{ tenemos:}$$
$$48 - 3t^3 = 0$$
$$-3t^3 = -48$$
$$t^2 = \frac{-48}{-3} = 16$$
$$t = \pm 4 \text{ s}$$

Para $t = 4$ s, tenemos:

$$s = 48t - t^3$$
$$s = 48\,(4) - (4)^3 = 192 - 64$$
$$\therefore\ s = 128 \text{ m}$$
$$v = 48 - 3t^2$$
$$\frac{dv}{ds} = -6t$$
$$a = \frac{dv}{ds} = -6(4)$$
$$\therefore\ a = -24 \text{ m/s}^2$$

4 Se deja caer una pelota desde lo alto de la torre Eiffel (París, Francia) que tiene 300.5 m de altura, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al suelo y cuál es su velocidad instantánea cuando toca el suelo?

Solución

Datos

$s = 300.5$ m (altura)
$g = 9.8$ m/s^2
$t = ?$
$v = ?$

Fórmulas

$$s = \frac{1}{2}\,gt^2$$
$$v = \frac{ds}{dt}$$

Sustitución

$$300.5 \text{ m} = \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$t^2 = \frac{(300.5\ \cancel{\text{m}})(2)}{9.8\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}$$
$$t^2 = 61.326 \text{ s}^2$$
$$t = \pm 7.831 \text{ s}$$

Si $s = \frac{1}{2}$ gt^2 se tiene:

$$s = \frac{1}{2}(9.8)\,t^2$$
$$s = 4.9\,t^2$$
$$\frac{ds}{dt} = 9.8\,t$$
$$v = \frac{ds}{dt} = 9.8\,t$$

Para $t = 7.831$ s, tenemos que:

$$v = 9.8\,t = 9.8(7.831)$$
$$v = 76.7438 \text{ m/s}$$

Resultado

$v = -76.7438$ m/s ya que la pelota va hacia abajo.

5 Una piedra que se mueve según la ley $s = 64t - 8t^2$, se lanza hacia arriba si s se mide en pies y t en segundos, encuentra:

a) Su posición y velocidad después de 2 s y después de 3 s.

b) ¿Qué altura alcanza?

c) ¿A qué distancia se moverá al cabo del cuarto segundo?

Solución

a) Para $t = 2$ s, se tiene:

$$s = 64\,t - 8t^2$$
$$s = 64(2) - 8(2)^2$$
$$s = 128 - 32$$
$$\therefore \quad s = 96 \text{ pies}$$

$$v = 64t - 8t^2$$
$$\frac{ds}{dt} = 64 - 16t$$
$$v = \frac{ds}{dt} = 64 - 16(2)$$
$$\therefore \quad v = 32 \text{ pies/s}$$

Para $t = 3$ s, se tiene:

$$s = 64t - \cancel{8t^2}$$
$$s = 64(3) - 8(3)^2$$
$$s = 192 - 72$$
$$\therefore \quad s = 120 \text{ pies}$$

$$v = 64 - 16t^2$$
$$v = 64 - 16(3)$$
$$v = 64 - 48$$
$$\therefore \quad v = 12 \text{ pies/s}$$

b) La máxima altura se alcanzará cuando $v = 0$, es decir:

$$v = 64 - ?$$
$$64 - 16t = 0$$
$$-16 = -64$$
$$t = \frac{-64}{-16}$$
$$\therefore \quad t = 4 \text{ s}$$

Para $t = 4$ s, se tiene:

$$s = 64t - 8t^2$$
$$s = 64(4) - 8(4)^2$$
$$s = 256 - 128$$
$$\therefore \quad s = 128 \text{ pies}$$

c) En el cuarto segundo:

$$s = 64t - 8t^2$$

$\therefore$ $s = 128$ pies indica que alcanza su máxima altura y empieza a descender.

6 Un coche que se mueve según la ley $s = 144\,t^2 - \frac{t^4}{4}$ hace un recorrido en 12 min, si se mide t en minutos y s en metros, encuentra:

a) ¿Qué distancia recorre el coche?

b) ¿Cuál es su velocidad máxima?

c) ¿Qué distancia ha recorrido el coche cuando alcanza su velocidad máxima?

Solución

a) $s = 144\,t^2 - \frac{t^4}{4}$, para $t = 12$min se tiene:

$$s = 144(12)^2 - \frac{(12)^4}{4} = 20\,736 - 5184 = 15\,552 \text{ m}$$

$\therefore$ El coche recorre 15 552 m en 12 minutos.

b)

$$s = 144\,t^2 - \frac{t^4}{4}$$
$$\frac{ds}{dt} = 288\,t - \left(\frac{1}{4}\right)(4t^3)$$
$$v = 288\,t - t^3$$
$$\frac{dv}{dt} = 288 - 3t^2$$

Cuando $a = 0$, se tiene:

$$288 - 3t^2 = 0$$
$$-3t^2 = -288$$
$$t^2 = \frac{-288}{-3} = 96$$
$$t = \pm 9.79 \text{ s } \Big\} \text{ Tiempo crítico}$$

Valor un poco menor

$$t = 9$$
$$\frac{dv}{dt} = 288 - 3t^2$$
$$\frac{dv}{dt} = 288 - 3(9)^2$$
$$\frac{dv}{dt} = 288 - 243$$
$$\therefore \ \frac{dv}{dt} = \oplus$$

Valor un poco mayor

$$t = 10$$
$$\frac{dv}{dt} = 288 - 3t^2$$
$$\frac{dv}{dt} = 288 - 3(10)^2$$
$$\frac{dv}{dt} = 288 - 300 = -2$$
$$\therefore \ \frac{dv}{dt} = \ominus$$

Máximo

$$v = 288\,t - t^3$$
$$v = 288(9.79) - (9.79)^3$$
$$v = 2\,819.52 - 938.31$$
$$v = 1881.21 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

∴ El coche alcanza su máxima velocidad a los 9.79 min y es de 1881.21 m/min.

c) Su máxima velocidad es cuando $t = 9.79$ min; entonces:

$$s = 144t^2 - \frac{t^4}{4}$$
$$s = 144\,(9.79)^2 - \frac{(9.79)^4}{4}$$
$$s = 13\,801.5504 - 2\,296.522876$$
$$s = 11\,505.02752 \text{ m}$$

∴ La distancia recorrida por el coche cuando alcanza su velocidad máxima es 11 505.02752 m.

EJERCICIO 22

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Una lámpara de arco cuelga a la altura de 3 m directamente sobre un camino rectilíneo y horizontal. Si una persona de 1.70 m de alto se va alejando de la lámpara a razón de 60 m/min, ¿cuántos metros por minuto se alarga su sombra?

2. Un punto se mueve sobre la parábola $y^2 = 16x$, de manera que la abscisa aumenta 2 cm por segundo, ¿en qué punto aumentan la ordenada y la abscisa a la misma razón?

3. Una escalera de 16 m se apoya contra un edificio, encuentra:

   a) La velocidad a la que se mueve el extremo superior cuando el inferior se aleja del edificio a una velocidad de 1 m/s y se encuentra a una distancia de él de 10 m.

   b) La velocidad a la que disminuye la pendiente.

4. Un tren que sale a las 7 horas de la mañana se dirige hacia el Este a una velocidad de 65 kilómetros por hora, mientras que otro, que sale a las 8 horas de la misma estación, se dirige hacia el Sur a una velocidad de 80 kilómetros por hora; encuentra la velocidad a la que se separan ambos trenes al mediodía.

5. Un barco, cuya cubierta está a una distancia de 15 m por debajo de la superficie de un muelle, es arrastrado por medio de un cable unido a la cubierta y que pasa por una argolla situada en el muelle. Si se sabe que cuando el barco se encuentra a una distancia del muelle de 36 m y se aproxima con una velocidad de $\frac{5}{4}$ m/s, encuentra la velocidad del extremo del cable.

6. El radio de la base de cierto cono aumenta a razón de 5 cm/h y la altura disminuye a razón de 6 cm por hora, calcula cómo varía el área total del cono cuando el radio mide 12 cm y la altura 36 cm.

7. El gas contenido en un globo esférico se escapa a razón de 500 cm^3/min, en el instante en que el radio es de 12.5 cm, determina:

   a) ¿Con qué rapidez disminuye el radio?

   b) ¿Con qué rapidez disminuye el área de la superficie?

8. Una vía del ferrocarril cruza una carretera bajo un ángulo de 30°; una locomotora se encuentra a 320 m del crucero y se aleja de él a una velocidad de 150 km/h; un automóvil se encuentra a 320 m del crucero y se acerca a él a una velocidad de 75 km/h, ¿a qué razón se altera la distancia entre los dos?

9. Una placa circular de metal se dilata por el calor, de manera que su radio aumenta con una rapidez de 0.1 min por segundo, ¿con qué rapidez aumenta el área cuando el radio es de 25 mm?

10. Un tanque cilíndrico vertical de 8 m de radio, se llena de agua a razón de 12 m^3/min. Encuentra la variación de la altura del nivel del agua con respecto al tiempo.

11. Un niño eleva un papalote a una altura de 250 m, si se sabe que el papalote se aleja del niño a una velocidad de 40 m/s, determina la velocidad a la que suelta el hilo cuando el papalote se encuentra a 400 m de distancia del niño.

12. Un foco de luz está situado en la cúspide de una torre de 80 m de altura, desde un punto situado a 20 m del foco y a su misma altura se deja caer una piedra, suponiendo que cae según la ley $s = 16t^2$, determina la velocidad a la que se mueve la sombra de la piedra sobre el suelo un segundo después de empezar a caer.

13. El espacio recorrido por un automóvil sobre una carretera horizontal con respecto a un punto fijo está dado en función del tiempo (t), por la ecuación $s=\frac{3t^4}{2}-22t^3+22t^2+72t$. Calcula el intervalo de tiempo en el que el automóvil marcha en sentido contrario al inicial.

14. Una partícula se mueve a lo largo de una línea horizontal de acuerdo con la ley $s = 2t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 12t$, determina:

    a) ¿Cuándo aumenta la velocidad y cuándo disminuye?

    b) ¿En qué instante cambia el sentido del movimiento?

    c) El espacio total recorrido en los tres primeros segundos del movimiento.

15. Una partícula se mueve de acuerdo con la ley $s = 2t^2 - 12t + 10$ a lo largo de una recta, donde (s) se mide en pies y (t) en segundos, calcula:

    a) Su velocidad cuando $t = 2$ s.

    b) Su velocidad cuando $t = 4$ s.

    c) ¿Cuándo es la velocidad igual a cero?

16. Dadas las siguientes ecuaciones de movimiento rectilíneo, calcula el espacio recorrido, la velocidad y la aceleración en el instante indicado.

    a) $s = 3t^2 - t$, para $t = 3$

    b) $s = 8t - 4t^2$, para $t = 5$

    c) $s=\sqrt{3t+2}$, para $t = 2$

    d) $s=\sqrt{t+5}$, para $t = 4$

    e) $s = 3t^2 - 9t + 4$, para $t = 1$

    f) $s=\frac{2}{\sqrt{3^t+3}}$

    g) $s = 100 - 4t - 8t^2$, para $t = 3$

    h) $s = 6t^2 - 2t^3$, para $t = 1$

    i) $s = 16t^2 - 20t + 4$, para $t = 2$

17. Dadas las siguientes ecuaciones del movimiento rectilíneo, calcula el espacio recorrido y la aceleración en el instante en que la velocidad se anula por primera vez.

    a) $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$

    b) $s=\frac{t}{1+t^2}$

    c) $s = 16t^2 - 64t + 64$

    d) $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$

    e) $s=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+4}}$

    f) $s=3t+\frac{12}{1+t}$

18. Una pelota se lanza hacia arriba en forma vertical siguiendo la ley $s = 25t - 5t^2$, si s se mide en metros y t en segundos, encuentra:

    a) Su posición y velocidad a los 3 s.

    b) ¿Cuál es su máxima altura?

19. Se deja caer una moneda desde una altura de 220 m, determina la velocidad instantánea de la moneda cuando alcanza el suelo.

20. Una pelota se deja caer de lo alto de un edificio que tiene 555 pies de altura, ¿cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al suelo y con qué rapidez llegará? (toma la gravedad terrestre como 32 pies/s^2).

21. Se deja caer una piedra de una torre de 220 pies con una velocidad inicial de (−22 pies/s), encuentra:

    a) ¿Cuál es su velocidad después de 3 s?

    b) ¿Cuál es su velocidad después de caer 108 pies?

22. Se arroja una moneda a una alberca desde una altura de 100m; un segundo más tarde se lanza otra moneda desde una altura de 75 m, ¿cuál de las dos choca primero con la superficie del agua?

23. Para calcular la altura de una torre, una persona deja caer una piedra de la cúspide de una torre sobre una piscina en el suelo, ¿cuál es la altura de la torre si el impacto con el agua se observa a los 6.8 s después de arrojar la piedra?

24. Un automóvil hace un recorrido en 54 min, moviéndose de acuerdo a $s = 12t^3 - 18t^2 + 9t - \frac{3}{2}$, midiendo ($s$) en kilómetros y ($t$) en horas, encuentra:

    a) ¿Qué distancia recorre el automóvil?

    b) ¿Cuál es su velocidad máxima?

    c) ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil cuando alcanza su velocidad máxima?

25. Dos móviles tienen a lo largo del eje x las siguientes posiciones: $s_1 = 6t - t^2$ y $s_2 = t^2 - 4t$, determina:

    a) ¿En qué instante tendrán igual posición?

    b) ¿En qué instante tendrán la misma velocidad?

    c) ¿Cuál será la velocidad de cada móvil en el instante $t = 2$ s?

    d) ¿Cuándo se mueven en la misma dirección?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Problemas de optimización sobre máximos y mínimos, áreas y volúmenes

La mayoría de los problemas estudiados en cálculo se han presentado en forma de ecuaciones. Pero en los problemas de física, ingeniería y economía que no están formulados en términos de ecuaciones matemáticas, es necesario elaborar un planteamiento que indique el proceso de solución.

Las expresiones como el menor costo en el menor tiempo, el mayor volumen, el tamaño óptimo, la menor área, la mayor ganancia, la menor distancia, el más alto voltaje, la mayor productividad, el menor esfuerzo; en todos los casos nos referimos a valores máximos y mínimos.

Existen varios pasos a considerar en la solución de este tipo de problemas, por ejemplo: la representación gráfica que interprete el problema dado, la simbología literal para las cantidades conocidas y para las cantidades por determinar, hacer el planteamiento matemático en términos de una variable independiente, hacer la sustitución en la ecuación de los valores conocidos y los desconocidos, realizar las operaciones y obtener los resultados requeridos.

Como lo anterior es bastante difícil, es necesario apoyarnos en las siguientes instrucciones:

1. Se detemina la función cuyo máximo o mínimo se desea obtener.
2. Si la expresión planteada contiene más de una variable, las condiciones dadas del problema nos proporcionarán suficientes relaciones entre las variables para que la función se exprese en términos de una sola variable independiente.
3. A la función resultante se le aplican las reglas del primer método para el cálculo de máximos y mínimos.
4. Es necesario construir el esquema de la función para comprobar los resultados obtenidos. Es conveniente recordar que en los problemas de optimización se aplican todos los conocimientos del cálculo diferencial, por lo que su práctica permite fijar aprendizajes razonados y creativos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra dos números positivos cuyo producto es 288 y que la suma del doble del primero más el segundo sea mínima.

Solución

Sea x el primer número

Sea y el segundo número

La ecuación de la suma mínima es: $u = 2x + y$ **(1)**

La ecuación que establece el producto de los dos números igual a 288 es $xy = 288$ **(2)**

De la ecuación 2 se tiene: $y = \dfrac{288}{x}$

Al sustituir la igualdad en la (**1**), tenemos:

$$u = 2x + \frac{288}{x} \quad \Big\} \text{ Aplicando el primer método para determinar máximos y mínimos relativos, resulta:}$$

$$\frac{du}{dx} = 2 - \frac{288}{x^2}$$

$$2 - \frac{288}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 288}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 288 = 0$$

$$2x^2 = 288$$

$$x^2 = \frac{288}{2}$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12 \;\Big\} \text{ Valores críticos}$$

Al analizar el valor crítico de $x = 12$, se tiene:

$$x = 11 \qquad\qquad x = 13$$

$$\frac{du}{dx} = 2 - \frac{288}{x^2} \qquad\qquad \frac{du}{dx} = 2 - 288$$

$$\frac{du}{dx} = 2 - \frac{288}{(11)^2} \qquad\qquad \frac{du}{dx} = 2 - \frac{288}{(13)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 2 - \frac{288}{121} = 2 - 2.38 \qquad\qquad \frac{du}{dx} = 2 - \frac{288}{169} = 2 - 1.704$$

$$\frac{du}{dx} = -0.38 = \ominus \qquad \text{Mínimo} \qquad \frac{du}{dx} = 0.296 = \oplus$$

Cuando $x = 12$, tenemos un mínimo cuyo valor es:

$$u = 2x + \frac{288}{x}$$

$$u = 2(12) + \frac{288}{12}$$

$$u = 24 + 24 = 48$$

$\therefore$ Existe un mínimo igual a 48.

Confirmando la existencia del mínimo, tenemos que el primer número buscado es $x = 12$; sustituyendo en la igualdad de la ecuación 2, se obtiene el segundo número:

$$y = \frac{288}{x} = \frac{288}{12} = 24$$

Sustituyendo los valores $x = 12$ y $y = 24$ en las ecuaciones 1 y 2, se comprueban las condiciones del problema:

$$u = 2x + y \quad \textbf{(1)} \qquad\qquad xy = 286 \quad \textbf{(2)}$$

$$u = 2(12) + 24 \qquad\qquad (12)(24) = 288$$

$$u = 48 \qquad\qquad 288 = 288$$

$\therefore$ Los números buscados son 12 y 24.

2 Encuentra dos números positivos que sumados sean igual a 10 y que el cuadrado de uno por el cubo del otro dé el producto máximo.

Solución

Sea x el primer número
Sea y el segundo número

La ecuación que establece la suma de los dos números igual a 10, es: $x + y = 10$ **(1)**

La ecuación del producto máximo es $u = x^3y^2$ **(2)**

De **(1)**, se tiene: $y = 10 - x$

Al sustituir la igualdad en (2), tenemos:

$$u = x^3(10-x)^2 \quad \Bigg\} \text{ Aplicando el primer método para determinar los máximos y mínimos, resulta:}$$

$$\frac{du}{dx} = x^3[2(10-x)(-1)] + (10-x)^2(3x^2)$$

$$\frac{du}{dx} = -2x^3(10-x) + 3x^2(100-20x+x^2)$$

$$\frac{du}{dx} = -20x^3 + 2x^4 + 300x^2 - 60x^3 + 3x^4 = 5x^4 - 80x^3 + 300x^2$$

$$5x^4 - 82x^3 + 300x^2 = 0$$

$$5x^2(x^2 - 16x + 60) = 0$$

$$5x^2 = 0 \qquad x^2 - 16x + 60 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad (x-10)\,(x-6) = 0$$

$$x - 10 = 0 \qquad x - 6 = 0$$

$$x_2 = 10 \qquad x_3 = 6$$

Como los números buscados deben ser positivos y $x_1 = 0$ no se satisfacen las condiciones del problema; por tanto, se analizan los valores críticos en $x_2 = 10$ y $x_3 = 6$.

Un valor un poco menor

$$x = 9$$

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 - 80x^3 + 300x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 5(9)^4 - 80(9)^3 + 300(9)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 32\,805 - 58\,320 + 24\,300$$

$$\frac{du}{dx} = -1215 = \ominus$$

Un valor un poco mayor

$$x = 11$$

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 - 80x^3 + 300x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 5(11)^4 - 80(11)^3 + 300(11)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 73\,205 - 106\,480 + 36\,300$$

$$\frac{du}{dx} = 3025 = \oplus$$

Mínimo

Este resultado no interesa ya que se busca un máximo.

Para $x = 6$

Un valor un poco menor

$$x = 5$$

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 - 80x^3 + 300x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 5(5)^4 - 80(5)^3 + 300(5)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 3\,125 - 10\,000 + 7\,500$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 625 = \oplus$$

Un valor un poco mayor

$$x = 7$$

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 - 80x^3 + 300x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 5(7)^4 - 80(7)^3 + 300(7)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 12\,005 - 27\,440 + 14\,700$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = -735 = \ominus$$

Máximo

Cuando $x = 6$ tenemos un máximo cuyo valor es:

$$u = x^3(10 - x)^2$$
$$u = (6)^2(10 - 6)^2$$
$$u = 216(4)^2 = 216(16)$$
$$u = 3456$$

$\therefore$ Existe un máximo igual a 3 456.

Al confirmar la existencia del máximo se tiene que uno de los números buscados es $x = 6$, al sustituir en la igualdad de la ecuación 1 se obtiene el segundo número:

$$y = 10 - x = 10 - 6 = 4$$

Al sustituir los valores $x = 6$ y $y = 4$ (1) y (2), se comprueban las condiciones del problema:

$$x + y = 10 \qquad \textbf{(1)}$$
$$6 + 4 = 10$$
$$10 = 10$$

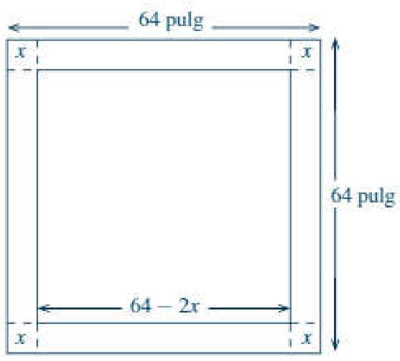
$$u = x^3y^2 \qquad \textbf{(2)}$$
$$u = (6)^3(4)^2$$
$$u = 3\,456$$

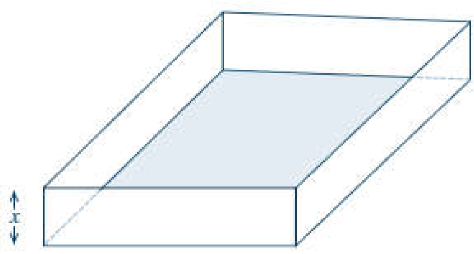
$\therefore$ Los números buscados son 6 y 4.

3 De una pieza cuadrada de hojalata cuyo lado mide 64 pulgadas, se desea construir una caja abierta por arriba del mayor volumen posible, cortando de las esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba la hojalata para formar las caras laterales. ¿Cuánto debe medir cada lado del cuadrado que se recorta y cuál es el volumen máximo?

Solución

a) Se traza una gráfica que representa al problema:





Sea: x la longitud del lado del cuadrado pequeño, es decir, la altura o profundidad de la caja.

$64 - 2x$ la longitud del lado del cuadrado que forma el fondo o la base de la caja.

El volumen de la caja se determina por la ecuación:

Volumen = (Área de la base)(Altura)

$$v = (64-2x)^2(x)$$ Aplicando el primer método para calcular máximos y mínimos, tenemos:

$$\frac{dv}{dx} = (64-2x)^2 - x(2)(64-2x)\,(-2)$$
$$\frac{dv}{dx} = (64-2x)^2 - 4x\,(64-2x)$$
$$\frac{dv}{dx} = 4\,096 - 256x + 4x^2 - 256x + 8x^2$$
$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 512x + 4\,096$$
$$12x^2 - 512x + 4\,096 = 0$$
$$(x-32)\,(12x-128) = 0$$
$$x-32=0 \quad (12x-128)=0$$
$$x_1 = 32 \quad 12x = 128$$
$$x = \frac{128}{12} = \frac{32}{3}$$
$$x_2 = 10.667$$

Para $x = 32$

Un valor un poco menor

$x = 31$

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 512x + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 12(31)^2 - 512(31) + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 11\,532 - 15\,872 + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = -244 = \ominus$$

Un valor un poco mayor

$x = 33$

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 512x + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 12(33)^2 - 512(33) + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 13\,068 - 16\,896 + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 268 = \oplus$$

Mínimo

Este resultado no nos interesa, ya que buscamos un máximo.

Para $x = 10.667$

Un valor un poco menor

$x = 10$

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 512x + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 12\,(10)^2 - 512(10) + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 1\,200 - 5\,120 + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 176 = \oplus$$

Un valor un poco mayor

$x = 11$

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 512x + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 12(11)^2 - 512(11) + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = 1\,452 - 5\,632 + 4\,096$$
$$\frac{dv}{dx} = -84 = \ominus$$

Máximo

Cuando $x = 10.667$, tenemos un máximo cuyo valor es:

$$v = (64 - 2x)^2(x)$$
$$v = [64 - 2(10.667)]^2\,(10.667)$$
$$v = (18020.3876)(10.667)$$
$$v = 19418.07406$$

$\therefore$ Existe un máximo igual a 19 418.07406 pulg^3.

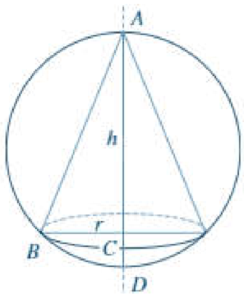
$\therefore$ El lado cuadrado que se recorta debe medir $x = \dfrac{32}{3} = 10.667$ pulg.

para que la caja tenga un volumen máximo de 19418.07406 pulg^3.

4 ••• Encuentra la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio r.

Solución

a) Se construye una gráfica interpretativa del problema:



Sea h la altura (AC) del cono.
r el radio (BC) de la base del cono.

$v = \dfrac{\pi\, r^2 h}{3}$ Volumen del cono.

Si $r^2 = (AC)(CD) = h(2r - h)$

Al sustituir en la ecuación del volumen, tenemos:

$$v = \frac{\pi\, r^2 h}{3}$$
$$v = \frac{\pi\, h(2r - h)\, h}{3}$$
$$v = \frac{\pi}{3}\, h^2(2r - h)$$

Aplicando el primer método para calcular máximos y mínimos, tenemos que:

$$\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3} h^2(-1) + \frac{\pi}{3}(2r - h)2h$$
$$\frac{dv}{dh} = -\frac{\pi\, h^2}{3} + \frac{4\pi\, r\, h}{3} - \frac{2\,\pi\, h^2}{3}$$
$$\frac{dv}{dh} = \frac{4\pi\, r\, h}{3} - \frac{\cancel{3}\,\pi\, h^2}{\cancel{3}}$$
$$\frac{4\pi\, r\, h}{3} - \pi\, h^2 = 0$$

$$h\left(\frac{4\pi\ r}{3}-\pi\ \boldsymbol{h}\right)=0$$

$$h_1=0 \quad \frac{4\pi\ r}{3}-\pi\ h=0$$

$$-\pi\ h=-\frac{4\pi\ r}{3}$$

$$h=\frac{-4\cancel{\pi}\ r}{-3\cancel{\pi}}$$

$$h=\frac{4r}{3}$$

b) Se analiza el valor crítico $h=\frac{4r}{3}$, lo que resulta:

Un valor un poco menor

$$h=r$$

$$\frac{dv}{dh}=\frac{4\pi\ r\ h}{3}-\pi\ h^2$$

$$\frac{dv}{dh}=\frac{4\pi\ r\ (r)}{3}-\pi\ (r)^2$$

$$\frac{dv}{dh}=\frac{4\pi\ r^2}{3}-\pi\ r^2$$

$$\frac{dv}{dh}=\frac{\pi\ r^2}{3}=\oplus$$

Un valor un poco mayor

$$h=\frac{5r}{3}$$

$$\frac{dv}{dh}=\frac{4\pi\ r\ h}{3}-\pi\ h^2$$

$$\frac{dv}{dh}=\frac{4\pi\ r\left(\frac{5r}{3}\right)}{3}-\pi\left(\frac{5r}{3}\right)^2$$

$$\frac{dv}{dh}=\frac{20\pi\ r^2}{9}-\frac{25\pi\ r^2}{9}$$

$$\frac{dv}{dh}=-\frac{5\pi\ r^2}{9}=\ominus$$

Máximo

Cuando $h=\frac{4r}{3}$ tenemos un máximo cuyo valor es:

$$v=\frac{\pi}{3}h^2(2r-h)$$

$$v=\frac{\pi}{3}\left(\frac{4r}{3}\right)^2\left(2r-\frac{4r}{3}\right)$$

$$v=\frac{\pi}{3}\left(\frac{16r^2}{9}\right)\left(\frac{6r-4r}{3}\right)$$

$$v=\frac{\pi}{3}\left(\frac{16r^2}{9}\right)\left(\frac{2r}{3}\right)$$

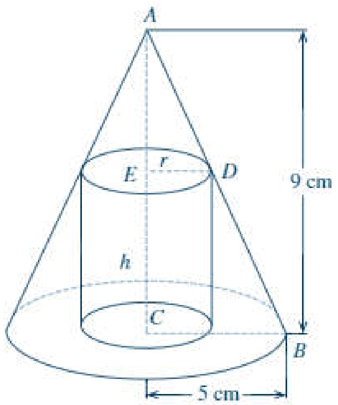
$$v=\frac{32\pi\ r^2}{81}$$

$\therefore$ La altura del cono debe ser $h=\frac{4r}{3}$ para que tenga un volumen máximo de $\frac{32\pi\ r^3}{81}$ y pueda inscribirse en una esfera de radio r.

5 ●●·Encuentra el radio y la altura del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto que tiene un radio de 5 cm y una altura de 9 cm.

Solución

a) Se traza una gráfica interpretativa del problema.



Sea $v = \pi r^2 h$, volumen del cilindro
$E = 9$ cm, altura del cono
$C = 5$ cm, radio del cono
$h = 9 - E$, altura del cilindro
$r =$ radio del cilindro

Con base en los triángulos *ABC* y *ADE* por ser semejantes, se tiene:

$$\frac{9}{5} = \frac{9-h}{r}$$

$$r = \frac{5(9-h)}{9}$$ Sustituyendo en la ecuación del volumen, resulta:

$$v = \pi\, r^2\, h$$

$$v = \pi\left[\frac{5(9-h)}{9}\right]^2 h$$

$$v = \pi\left[\frac{25(9-h)^2}{9}\right]h$$

$$v = \frac{25\pi\, h(9-h)^2}{81}$$ Aplicando el primer método para calcular los máximos y mínimos, se tiene:

$$\frac{dv}{dh} = \frac{25\,\pi\, h}{81}(2)(9-h)(-1) + (9-h)^2\frac{25\pi}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = -\frac{50\,\pi\, h(9-h)}{81} + \frac{25\pi}{81}(81 - 18h + h^2)$$

$$\frac{dv}{dh} = -\frac{450\,\pi\, h}{81} + \frac{50\,\pi\, h^2}{81} + 25\pi - \frac{450\,\pi\, h}{81} + \frac{25\,\pi\, h^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi\, h}{81} + \frac{75\pi\, h^2}{81}$$

$$25\pi - \frac{900\pi\ h}{81} + \frac{75\pi\ h^2}{81} = 0$$

$$\frac{2\ 025\pi - 900\pi\ h + 75\pi\ h^2}{81} = 0$$

$2\ 025\pi - 900\pi\ h + 75\pi\ h^2 = 0$ } Por fórmula general para ecuaciones de segundo grado

$$h = \frac{900\pi \pm \sqrt{810\ 000\pi^2 - 4(75\pi)(2\ 025\pi)}}{2(75\pi)}$$

$$h = \frac{900\pi \pm \sqrt{202\ 500\pi^2}}{150\pi} = \frac{900\pi \pm 450\pi}{150\pi}$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{1350\cancel{\pi}}{150\cancel{\pi}} = 9 \\ h_2 &= \frac{450\cancel{\pi}}{150\cancel{\pi}} = 3 \end{aligned}\right\} \text{Valores críticos}$$

b) Se analizan los valores críticos para obtener el máximo:

Para $h = 9$

Un valor un poco menor

$h = 8$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi\ h}{81} + \frac{75\pi\ h^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi(8)}{81} + \frac{75\pi\ (8)^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{7\ 200\pi}{81} + \frac{4\ 800\pi}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = -\frac{375\pi}{81} = \ominus$$

Un valor un poco mayor

$h = 10$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi\ h}{81} + \frac{75\pi\ h^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi(10)}{81} + \frac{75\pi(10)^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{9\ 000\pi}{81} + \frac{7\ 500\pi}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{525\pi}{81} = \oplus$$

Mínimo

El resultado anterior no nos interesa ya que buscamos un máximo:

Para $h = 3$

Un valor un poco menor

$h = 2$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi\ h}{81} + \frac{75\pi\ h^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi(2)}{81} + \frac{75\pi(2)^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{1\ 800\pi}{81} + \frac{300\pi}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{525\pi}{81} = \oplus$$

Un valor un poco mayor

$h = 4$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi\ h}{81} + \frac{75\pi\ h^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{900\pi(4)}{81} + \frac{75\pi(4)^2}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{3\ 600\pi}{81} + \frac{1\ 200\pi}{81}$$

$$\frac{dv}{dh} = -\frac{375\pi}{81} = \ominus$$

Máximo

Cuando $h = 3$ se tiene un máximo cuyo valor es:

$$v = \frac{25\pi\, h(9-h)^2}{81}$$
$$v = \frac{25\pi(3)(9-3)^2}{81} = \frac{75\pi(6)^2}{81} = \frac{75\pi(36)}{81}$$
$$v = \frac{2\ 700\pi}{81} = \frac{300\pi}{9} = \frac{100\pi}{9}$$

$\therefore$ La altura del cilindro debe ser $h = 3$ cm para que tenga un volumen máximo de $\frac{100\pi}{3}\text{cm}^3$.

Para calcular el radio se sustituye el valor de $h = 3$ cm en la ecuación $r = \frac{5(9-h)}{9}$, lo que resulta:

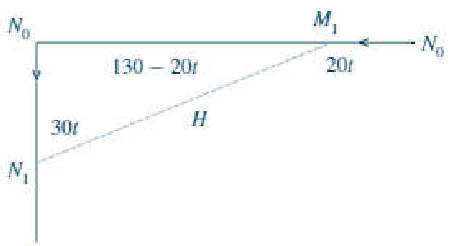
$$r = \frac{5(9-3)}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}\text{cm}$$

$\therefore$ El volumen máximo del cilindro inscrito en el cono dado es de $\frac{100\pi}{3}\text{cm}^3$, lo cual ocurre cuando el radio es de $\frac{10}{3}$cm y la altura de 3 cm.

6 ••• En un instante determinado, un buque (M) se encuentra a 130 km al Este de otro buque (N). M empieza a navegar hacia el Oeste con una velocidad de 20 km/h, mientras que N lo hace hacia el Sur con una velocidad de 30 km/h. Si las rutas iniciales no se modifican, encuentra el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima y calcula dicha distancia.

Solución

a) Se traza la gráfica interpretativa del problema.



Sean: M_0 y N_0 las posiciones de los buques en el instante inicial.
M_1 y N_1 las posiciones de los buques t horas más tarde.
La distancia recorrida por M en t horas es de $20t$ kilómetros y la recorrida por N es de $30t$ kilómetros.

La distancia entre los buques H se determina por el teorema de Pitágoras, es decir:
$H^2 = (30t)^2 + (130 - 20t)^2$; aplicando el primer método para calcular los máximos y mínimos relativos, resulta:

$$H^2 = (30t)^2 + (130-20t)^2$$
$$2H\frac{dH}{dt} = 2(30t)(30) + 2(130-20t)(-20)$$
$$\frac{dH}{dt} = \frac{1\ 800t - 5\ 200 + 800t}{2H} = \frac{2\ 600t - 5\ 200}{2H}$$
$$\frac{dH}{dt} = \frac{1\ 300t - 2\ 600}{H}$$

$$\frac{1\,300t - 2\,600}{H} = 0$$
$$1\,300t - 2\,600 = 0$$
$$1\,300t = 2\,600$$
$$t = \frac{2\,600}{1\,300}$$
$$t = 2 \;\} \text{ Valor crítico}$$

Analizando el valor crítico resulta:

Un valor un poco menor	Un valor un poco mayor
$t = 1$	$t = 3$
$\frac{dH}{dt} = \frac{1\,300t - 2\,600}{H}$	$\frac{dH}{dt} = \frac{1\,300t - 2\,600}{H}$
$\frac{dH}{dt} = \frac{(1\,300)(1) - 2\,600}{H}$	$\frac{dH}{dt} = \frac{(1\,300)(3) - 2\,600}{H}$
$\frac{dH}{dt} = -\frac{1\,300}{H} = \ominus$	$\frac{dH}{dt} = \frac{1\,300}{H} = \oplus$

Mínimo

Cuando $t = 2$ se tiene un mínimo cuyo valor es:

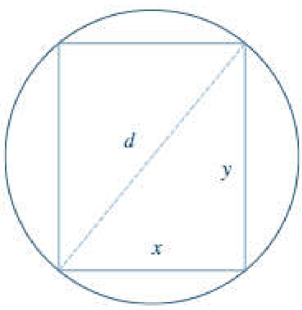
$$H^2 = (30t)^2 + (130 - 20t)^2$$
$$H^2 = [30(2)]^2 + [130 - 20(2)]^2$$
$$H^2 = 3\,600 + 8\,100 = 11\,700$$
$$H = \pm\, 108.16$$

$\therefore$ La distancia mínima entre los buques es de 108.16 km y se produce 2 horas después de iniciarse el movimiento.

7 ••Se supone que la resistencia de una viga de sección transversal rectangular es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la profundidad, ¿cuáles son las dimensiones de la viga de mayor resistencia que puede aserrarse de un tronco redondo de 36 pulgadas de diámetro?

Solución

a) Se traza una gráfica interpretativa del problema:



Sean x, ancho
y, profundidad
Por el teorema de Pitágoras tenemos que:
$d^2 = x^2 + y^2$, como el diámetro es de 36 pulgadas resulta: $x^2 + y^2 = (36)^2$ o $x^2 + y^2 = 1296$ **(1)**

La viga tendrá resistencia máxima cuando la función $f(x) = xy^2$ **(2)** sea máxima.

De (1) se despeja y^2 y se sustituye en la (2), se obtiene la función en términos de x.

(1) $x^2 + y^2 = 1296$
$y^2 = 1296 - x^2$

(2) $f(x) = xy^2$
$f(x) = x(1296 - x^2)$

Al aplicar el primer método para calcular los máximos y mínimos, resulta:

$$f(x) = x(1\,296 - x^2)$$
$$f(x) = 1\,296x - x^3$$
$$f'(x) = 1\,296 - 3x^2$$
$$1\,296 - 3x^2 = 0$$
$$-3x^2 = -1\,296$$
$$x^2 = \frac{-1\,296}{-3} = 432$$
$$x = \pm 20.7846$$

Considerando el valor crítico positivo, se tiene:

$$x = 20.7846$$

Un valor un poco menor

$x = 20$

$f'(x) = 1\,296 - 3x^2$

$f'(x) = 1\,296 - 3(20)^2$

$f'(x) = 1\,296 - 1\,200$

$f'(x) = 96 = +$

Un valor un poco mayor

$x = 21$

$f'(x) = 1\,296 - 3x^2$

$f'(x) = 1\,296 - 3\ (21)^2$

$f'(x) = 1\,296 - 1\,323$

$f'(x) = -27 = -$

Máximo

Cuando $x = 20.7846$, se tiene un máximo cuyo valor es:

$$f(x) = 1296 - x^3$$
$$f(x) = 1296(20.7846) - (20.7846)^3$$
$$f(x) = 26936.8416 - 8978.9388$$
$$f(x) = 17957.9028$$

$\therefore$ Existe un máximo en 17957.9028.

Como nos piden las dimensiones, se tiene que:

Ancho

$x = 20.7846$ pulg

Profundidad

$y^2 = 1296 - x^2$

$y = \sqrt{1296 - x^2}$

$y = \sqrt{1296 - 432}$

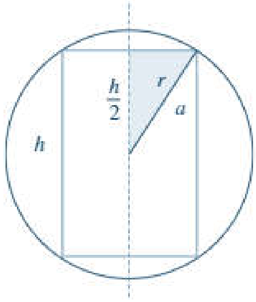
$y = \sqrt{864}$

$\therefore\ y = 29.3938$ pulg

8 Encuentra las dimensiones y el volumen del cilindro recto circular máximo que se puede inscribir en una esfera de radio a.

Solución

a) Se traza la gráfica interpretativa del problema:



Sean r, radio del cilindro
h, altura del cilindro
$v = \pi r^2 h$ el volumen del cilindro

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo sombreado, se tiene la siguiente relación:

$$a^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Bigg\} \text{ de donde:}$$

$$r^2 = a^2 - \frac{h^2}{4} \Bigg\} \text{ Sustituyendo en la ecuación de volumen, tenemos:}$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$v = \pi\left(a^2 - \frac{h^2}{4}\right)h \Bigg\} \text{ Al aplicar el primer método para calcular máximos y mínimos se tiene:}$$

$$\frac{dv}{dh} = \pi\left[\left(a^2 - \frac{h^2}{4}\right) + h\left(-\frac{2h}{4}\right)\right]$$

$$\frac{dv}{dh} = \pi\left[a^2 - \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2}\right] = \pi\left(a^2 \frac{3h^2}{4}\right)$$

$$a^2\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$-\frac{3\pi h^2}{4} = -a^2\pi$$

$$-3\pi h^2 = -4a^2\pi$$

$$h^2 = \frac{-4a^2\cancel{\pi}}{-3\cancel{\pi}} = \frac{4a^2}{3}$$

$$h = \pm\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Al analizar el valor crítico positivo, resulta:

$$h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Un valor un poco menor

$$h = a$$

Un valor un poco mayor

$$h = \frac{3a}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{dv}{dh} = a^2\pi - \frac{3\pi\, h^2}{4}$$
$$\frac{dv}{dh} = a^2\pi - \frac{3\pi\,(a)^2}{4}$$
$$\frac{dv}{dh} = a^2\pi - \frac{3a^2\pi}{4}$$
$$\frac{dv}{dh} = a^2\pi - \frac{a^2\pi}{4} = \oplus$$

$$\frac{dv}{dh} = a^2\,\pi - \frac{3\,\pi\, h^2}{4}$$
$$\frac{dv}{dh} = a^2\,\pi - \frac{3\,\pi\left(\frac{3a}{\sqrt{3}}\right)^2}{4}$$
$$\frac{dv}{dh} = a^2\,\pi - \frac{9a^2\,\pi}{4}$$
$$\frac{dv}{dh} = a^2\,\pi - \frac{5a^2\,\pi}{4} = \ominus$$

Máximo

Cuando $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ se tiene un máximo cuyo valor es:

$$v = \pi\left(a^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$$
$$v = \pi\left[a^2 - \frac{\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}{4}\right]\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$$
$$v = \pi\left(a^2 - \frac{4a^2}{12}\right)\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$$
$$v = \pi\left(\frac{2a^2}{3}\right)\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$$
$$v = \frac{4\,\pi\, a^3}{3\sqrt{3}}$$

$\therefore$ Se tiene un volumen máximo de $\frac{4\,\pi\, a^3}{3\sqrt{3}}$.

Como se piden las dimensiones, se tiene que:

Altura

$$h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Radio

$$r^2 = a^2 - \frac{h^2}{4}$$
$$r^2 = a^2 \frac{\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}{4}$$
$$r^2 = a^2 - \frac{4a^2}{12} = \frac{2}{3}a^2$$
$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a$$

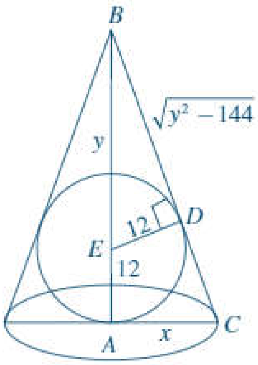
$\therefore$ Las dimensiones del cilindro para un volumen máximo de $v = \frac{4\,\pi\, a^3}{3\sqrt{3}}$ son

$$h = \frac{2a}{\sqrt{3}} \text{ y } r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a.$$

9 Encuentra las dimensiones del cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 12 cm de diámetro.

Solución

a) Se traza la gráfica interpretativa del problema.



Sean $x =$ radio de la base del cono.

$y + 12 =$ altura del cono.

$v = \dfrac{\pi\ r^2\ h}{3}$ Volumen del cono.

Con base en los triángulos ABC y DBE por ser semejantes, se tiene:

ΔABC: Cateto opuesto $(y + 12)$ $\quad$ ΔDBE: Cateto opuesto $\left(\sqrt{y^2-144}\right)$

Cateto adyacente (x) $\quad$ Cateto adyacente (12)

$$\therefore \quad \left.\frac{x}{12}=\frac{y+12}{\sqrt{y^2 144}}\ \right\} \text{ Al elevar al cuadrado, resulta:}$$

$$\frac{x^2}{144}=\frac{(y+12)^2}{y^2-144}$$

$$x^2=\frac{144(y+12)^{\cancel{2}}}{\cancel{(y+12)}(y-12)}=\frac{144(y+12)}{y-12}=r^2$$

Al sustituir la anterior igualdad y la altura $(y + 12)$ en la ecuación del volumen, resulta:

$$v=\frac{\pi\ r^2\ h}{3}$$

$$v=\frac{\pi\left[\dfrac{144\ (y+12)}{y-12}\right](y+12)}{3}$$

$$\left.v=\frac{144\ \pi\ (y+12)^2}{3(y-12)}\ \right\} \text{ Al aplicar el primer método para calcular los máximos y mínimos, se tiene:}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{3(y-12)[144\pi\ (2)\ (y+12)]-144\pi(y+12)^2(3)}{[3(y-12)]^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{864\pi(y+12)(y-12)-432\pi(y+12)^2}{9\ (y-12)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\cancel{9}\pi\ (y-12)[96\ (y-12)-48\ (y+12)]}{\cancel{9}(y-12)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\pi\ (y-12)(96y-1152-48y-576)}{(y-12)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\pi(y+12)(48y-1728)}{(y-12)^2}=\frac{48\pi(y+12)(y-36)}{(y-12)^2}$$

$$\frac{48\pi(y+12)(y-36)}{(y-12)^2}=0$$

$$48\pi(y+12)(y-36)=0$$

$$y+12=0 \qquad y-36=0$$

$$y_1=-12 \qquad y_2=36 \ \} \text{ Valores críticos}$$

Se analiza el valor crítico positivo, lo que resulta:

$$y=36$$

Un valor un poco menor

$$y=35$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{48\pi(y+12)(y-36)}{(y-12)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{48\pi(35+12)(35-36)}{(35-12)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{48\pi(47)(-1)}{(23)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{-2256\,\pi}{529}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dy}=-$$

Valor un poco mayor

$$y=37$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{48\pi(y+12)(y-36)}{(y-12)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{48\pi(37+12)(37-36)}{(37-12)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{48\pi(49)(1)}{(25)^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{2352\,\pi}{625}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dy}=+$$

Mínimo

Cuando $y=36$, se tiene un mínimo cuyo valor es:

$$v=\frac{144\pi(y+12)^2}{3(y-12)}$$

$$v=\frac{144\pi(y+12)^2}{3(y-12)}=\frac{48\pi(48)^2}{24}=2\pi(2304)$$

$$v=4608\pi$$

$\therefore$ Existe un mínimo en $v=4608\,\pi$.

Como nos piden las dimensiones del cono, se tiene:

Altura

$$y+12$$

$$36+12=48$$

La altura del cono es de 48 cm.

Radio

$$x^2=\frac{144(y+12)}{y-12}$$

$$x^2=\frac{144(36+12)}{36-12}=\frac{144(48)}{24}$$

$$x^2=288$$

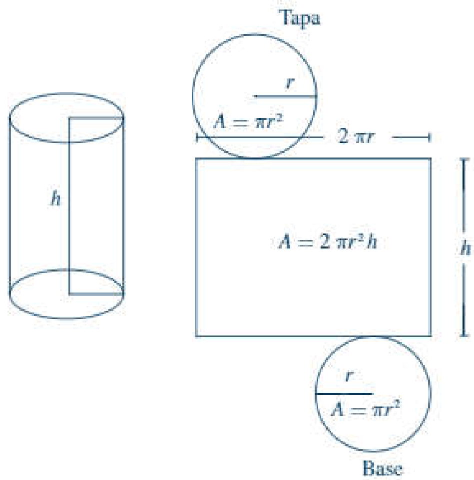
$$x^2=\sqrt{288}=\sqrt{144(2)}=12\sqrt{2}\text{ cm}$$

$\therefore$ Las dimensiones del cono para un volumen mínimo de $v=4608\,\pi\text{ cm}^3$ son: altura de 48 cm y radio de $12\sqrt{2}$ cm.

10 Encuentra las dimensiones de un recipiente cilíndrico de latón, de 1200 pulg^3 de capacidad, que requiere la menor cantidad de metal (área total).

Solución

a) Se traza una gráfica interpretativa del problema.



Sean: $r =$ radio de la base
$h =$ altura
$v =$ capacidad o volumen 1200 pulg^3
$A =$ cantidad de metal

La ecuación del volumen del cilindro es:
$v = \pi r^2 h = 1200$ pulg^3 **(1)**

La ecuación del área total que se requiere de metal es:

$$A = \overbrace{\pi r^2}^{\text{Área base}} + \overbrace{\pi r^2}^{\text{Área tapa}} + \overbrace{2\pi r h}^{\text{Área lateral}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \textbf{(2)}$$

De la **(1)** se despeja h, resultando:

$$v = \pi r^2 h$$

$$1\,200 = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1\,200}{\pi r^2} \quad \text{Al sustituir en } \textbf{(2)} \text{ se tiene:}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A = 2\pi r^2 + \cancel{2\pi r}\left(\frac{1200}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}\right)$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2\,400}{r} \quad \text{Al aplicar el primer método para calcular los máximos y mínimos, resulta:}$$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2\,400}{r^2}$$

$$4\pi\ r - \frac{2\ 400}{r^2} = 0$$

$$\frac{4\pi\ r^3 - 2\ 400}{r^2} = 0$$

$$4\pi\ r^3 - 2\ 400 = 0$$

$$4\pi r^3 = 2\ 400$$

$$r^3 = \frac{2\ 400}{4\pi}$$

$$r = 5.758 \text{ pulg}$$

Al anlizar el valor crítico, tenemos:

$$r = 5.758$$

Un valor un poco menor	Un valor un poco mayor
$r = 5$	$r = 6$
$\frac{dA}{dr} = 4\ \pi\ r - \frac{2\ 400}{r^2}$	$\frac{dA}{dr} = 4\ \pi\ r - \frac{2\ 400}{r^2}$
$\frac{dA}{dr} = 4\ \pi(5) - \frac{2\ 400}{(5)^2}$	$\frac{dA}{dr} = 4\ \pi(6) - \frac{2\ 400}{(6)^2}$
$\frac{dA}{dr} = 62.831 - 96$	$\frac{dA}{dr} = 75.398 - 66.667$
$\frac{dA}{dr} = -33.169 = \ominus$	$\frac{dA}{dr} = 8.731 = \oplus$

Mínimo

Las dimensiones del cilindro para el cual la cantidad de metal es mínima son:

Altura

$$h = \frac{1200}{\pi\ r^2} = \frac{1200}{\pi(5.758)^2}$$

$$\boldsymbol{h} = 11.52 \text{ pulg}$$

Radio

$$r = 5.758\text{pulg}$$

El área mínima de metal es:

$$A = 2\pi\ r^2 + 2\pi\ r\ h$$

$$A = 2\pi\ (5.758)^2 + 2\pi(5.758)(11.52)$$

$$A = 208.316 + 416.777$$

$$A = 625.093 \text{ pulg}^2$$

$\therefore$ Las dimensiones del cilindro son altura $h = 11.52$ pulg, radio $r = 5.758$ pulg; la cantidad mínima de metal para construirlo es de $A = 625.093$ pulg^2.

Máximos y mínimos aplicados a la economía

El procedimiento para determinar los máximos y mínimos (primer método) es un modelo efectivo a seguir en el campo de la economía.

En la Teoría económica se tienen las relaciones entre el **beneficio marginal**, **ingreso marginal** y **costo marginal**, con respecto al número de unidades que se producen o se venden; matemáticamente se expresa por la ecuación:

$$P \text{ (beneficio total)} = R \text{ (ingreso total)} - C \text{ (costo total)}$$

La derivada de cada una de las anteriores razones de cambio, nos da como resultado los marginales (márgenes o límites) económicos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El costo total de producción de x unidades diarias de un producto es de $\left(\frac{x^2}{2}+70x+50\right)$ dólares y el precio de venta de una de ellas es de $\left(100-\frac{x}{2}\right)$ dólares; encuentra:

a) El número de unidades que se deben vender diariamente para que el beneficio sea máximo.

b) Demuestra que el costo de producción de una unidad tiene un mínimo.

Solución

a) El beneficio de la venta de x unidades diarias está dado por la ecuación: $P = R - C$

$$P = x\left(100-\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{2}+70x+50\right)$$

$$P = 100x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}-70x-50$$

$$P = 30x - x^2 - 50 \quad \Bigg\} \text{ Al aplicar el primer método para calcular los máximos y los mínimos, se tiene:}$$

$$\frac{dP}{dx} = 30-2x$$

$$30-2x=0$$

$$-2x=-30$$

$$x=\frac{-30}{-2}$$

$$x=15$$

Analizando el valor crítico, resulta:

Para $x = 15$

Un valor un poco menor	Un valor un poco mayor
$x = 14$	$x = 16$
$\frac{dP}{dx} = 30 - 2x$	$\frac{dP}{dx} = 30 - 2x$
$\frac{dP}{dx} = 30 - 2(14)$	$\frac{dP}{dx} = 30 - 2(16)$
$\frac{dP}{dx} = 2 = +$	$\frac{dP}{dx} = -2 = -$

Máximo

Cuando $x = 15$, se tiene un máximo cuyo valor es:

$$P = 30x - x^2 - 50$$
$$P = 30(15) - (15)^2 - 50$$
$$P = 450 - 225 - 50$$
$$P = 175$$

$\therefore$ Se deben vender 15 unidades diarias para que el beneficio máximo sea de 175 dólares.

b) Para analizar 1os efectos en los niveles de producción en el costo, se utiliza la función de costo medio $(\overline{C})$ que se expresa por la ecuación: $\overline{C} = \frac{c}{x}$.

Al aplicar el principio anterior, se tiene:

$$\overline{C} = \frac{\left(\frac{x^2}{2} + 70x + 50\right)}{x}$$

$$\overline{C} = \frac{x}{2} + 70 + \frac{50}{x} \quad \Big\} \text{ Al aplicar el primer método para calcular los máximos y mínimos, se tiene:}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{50}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{2x^2}$$

$$\frac{x^2 - 100}{2x^2} = 0$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 10 \quad \Big\} \text{ Valor crítico}$$

Al aplicar el valor crítico, se tiene:

Para $x = 10$

Un valor un poco menor

$x = 9$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{x^2 - 100}{2x^2}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{(9)^2 - 100}{2(9)^2}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{81 - 100}{162}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = -0.117 = \ominus$$

Un valor un poco mayor

$x = 11$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{x^2 - 100}{2x^2}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{(11)^2 - 100}{2(11)^2}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{121 - 100}{242}$$

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = 0.086 = \oplus$$

Mínimo

Cuando $x = 10$, se tiene un mínimo cuyo valor es:

$$\overline{C} = \frac{x}{2} + 70 + \frac{50}{x}$$

$$\overline{C} = \frac{10}{2} + 70 + \frac{50}{10}$$

$$\overline{C} = 5 + 70 + 5 = 80$$

$\therefore$ El costo de producción de una unidad tiene un mínimo relativo a 10 unidades diarias producidas con un costo mínimo de 80 dólares.

2 Una empresa ha calculado que su ingreso total por un cierto producto está dado por la ecuación $R = (52500x + 450x^2 - x^3)$ pesos, en donde x es el número de unidades producidas; ¿qué cantidad de producción dará un ingreso máximo?

Solución

$$R = 52500x + 450x^2 - x^3$$

Al aplicar el primer método para calcular los máximos y mínimos, se tiene:

$$\frac{dR}{dx} = 52\,500 + 900x - 3x^2$$

$$52\,500 + 900x - 3x^2 = 0$$

$$17\,500 + 300x - x^2 = 0$$

$$(350 - x)(50 + x) = 0$$

$$350 - x = 0 \qquad 50 + x = 0$$

$$-x = -350 \qquad x^2 = -50$$

$$x_1 = 350$$

Al analizar el valor crítico positivo, resulta:

Para $x = 350$

Valor un poco menor

$x = 349$

$$\frac{dR}{dx} = 17\ 500 + 300x - x^2$$

$$\frac{dR}{dx} = 17\ 500 + 300(349) - (349)^2$$

$$\frac{dR}{dx} = 17\ 500 + 104\ 700 - 121\ 801$$

$$\frac{dR}{dx} = 399 = \oplus$$

Valor un poco mayor

$x = 351$

$$\frac{dR}{dx} = 17\ 500 + 300x - x^2$$

$$\frac{dR}{dx} = 17\ 500 + 300(351) - (351)^2$$

$$\frac{dR}{dx} = 17\ 500 + 105\ 300 - 123\ 201$$

$$\frac{dR}{dx} = -401 = \ominus$$

Máximo

Cuando $x = 350$, se tiene un máximo cuyo valor es:

$$R = 52\ 500x + 450x^2 - x^3$$

$$R = 52\ 500(350) + 450(350)^2 - (350)^3$$

$$R = 18\ 375\ 000 + 55\ 125\ 000 - 42\ 875\ 000$$

$$R = 73\ 500\ 000 - 42\ 875\ 000$$

$$R = 30\ 625\ 000$$

$\therefore$ El máximo ingreso se obtiene cuando se producen 350 unidades, siendo esté de 30 625 000 pesos.

EJERCICIO 23

I. Al aplicar el primer método para calcular máximos y mínimos, en equipo, resuelvan los siguientes problemas y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Determina el área del mayor rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, que puede inscribirse en la figura limitada por las dos parábolas $4y = 16 - x^2$ y $8y = x^2 - 16$.
2. Encuentra las dimensiones del mayor rectángulo que pueda inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.
3. Elabora la gráfica de $y = 8 - x^2$ y determina los puntos que quedan más próximos a $P(0,4)$.
4. Una página rectangular ha de contener 36 cm^2 de impresión; los márgenes superior e inferior de la página tienen una anchura de $1\frac{1}{2}$ cm; los márgenes laterales tienen 1 cm, ¿cuáles deberán de ser las dimensiones de la página de modo que la cantidad de papel a emplear sea mínima?
5. Un rectángulo tiene un perímetro de 900 m, ¿cuáles deberán de ser sus dimensiones para que su área sea máxima?
6. Encuentra dos números cuya suma sea 120 y de forma que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.
7. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 220 y cuyo producto sea máximo.

8. El producto de dos números positivos es 192, ¿qué números se habrían de elegir para que la suma del primero con tres veces el segundo fuera un mínimo?
9. Se ha de construir una caja abierta por arriba a partir de una pieza cuadrada de latón de 12 pulg de lado, cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando los lados; determina el volumen máximo de la caja que se pueda construir.
10. Un rectángulo está definido por el eje x y el semicírculo $y=\sqrt{25-x^2}$, ¿qué longitud y ancho debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?
11. Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante del sistema coordenado, está formado por el eje x, eje y y la recta que pasa por el punto $A(2,3)$; determina los vértices del triángulo para que su área sea mínima.
12. El área de una superficie rectangular es de 18 m^2, se sabe que en su interior hay otra de forma que los márgenes superior e inferior son de $\frac{3}{4}$ m y que los márgenes laterales son de $\frac{1}{2}$ m, determina las dimensiones de la superficie exterior para que el área comprendida entre los márgenes sea máxima.
13. Se desea construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y de 125 cm^3 de volumen; determina las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal (área total) sea mínima, en el caso en que:
    a) El recipiente sea abierto.
    b) El recipiente sea cerrado.
14. El perímetro conjunto de un círculo y un cuadrado es 24 pies; determina las dimensiones del círculo y del cuadrado que den un área total mínima.
15. El perímetro conjunto de un triángulo equilátero y un cuadrado es 40 cm; determina las dimensiones del triángulo y del cuadrado que den un área total mínima.
16. Encuentra dos números positivos tales que la suma del primero con el doble del segundo sea 200 y cuyo producto sea máximo.
17. Un ganadero dispone de 2 000 m de malla para cercar dos corrales rectangulares adyacentes, ¿cuáles son las dimensiones para que el área encerrada sea máxima?
18. Se construye una caja con una pieza rectangular de cartón de 16 pies por 6 pies, cortando cuatro cuadrados iguales para formar las esquinas y doblando las cajas, ¿qué longitud por lado deben tener los cuadrados para que la caja tenga el volumen máximo?
19. Se tienen que cercar dos terrenos, uno es un rectángulo con una longitud del doble del ancho; el otro un cuadrado. El rectángulo debe contener por lo menos 1 764 m^2 y el cuadrado por lo menos 800 m^2, se tienen 1360 m disponibles de cerca.
    a) Si x es el ancho del terreno rectangular, ¿cuáles son los posibles valores máximos y mínimos de x?
    b) ¿Cuál es el área total máxima posible?
20. Una huerta rectangular ha de proyectarse al lado del solar de un vecino, debe tener un área de 10 800 m^2; si el vecino paga la mitad de la cerca medianera, ¿cuáles son las dimensiones de la huerta para que el costo de cercarla sea para el dueño de la huerta mínimo?
21. Determina el diámetro de un bote cilíndrico de hojalata de un litro de capacidad para que en su construcción entre la menor cantidad de hojalata:
    a) Si el bote es abierto por arriba.
    b) Si el bote es cerrado.

22. La resistencia de una viga rectangular es proporcional al producto del ancho por el cuadrado de su espesor; calcula las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco cuya sección transversal es una elipse de semiejes a (mayor) y b (menor).

23. Dada una esfera de 9 cm de radio, calcula la altura de cada uno de los sólidos siguientes:

    a) Cilindro circular recto inscrito de volumen máximo.

    b) Cilindro circular recto inscrito de área total máximo.

    c) Cono recto circunscrito de volumen mínimo.

24. Determina el punto de la curva $2y = x^2$ más cercano a $A(4,1)$.

25. Una persona sobre un bote de remos está situada en un punto M a una distancia de 8 km de un punto A de la costa (rectilínea) y desea llegar a un punto B de la costa a 9 km de A en el menor tiempo posible. Determina el camino que debe seguir si se sabe que puede remar a una velocidad de 3 km/h y andar a una velocidad de 6 km/h.

26. Determina las dimensiones del cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 pulg de diámetro.

27. Se quiere apuntalar la pared de un edificio por medio de una viga apoyada sobre una pared paralela, de 15 m de altura, situada a una distancia de 12 m de la primera; determina la longitud L de la viga más corta que se pueda emplear.

28. En un cono circular recto r, se inscribe un cilindro circular recto; determina el radio R del cilindro para que:

    a) Su volumen sea máximo.

    b) Su área lateral sea máxima.

29. Determina las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima que se puede inscribir en una esfera de 12 cm de radio.

30. Determina las dimensiones del volumen del cilindro circular recto que puede inscribirse en un cono circular recto con un radio de 5 cm y una altura de 12 cm.

II. Aplica el primer método para calcular máximos y mínimos, en problemas de economía y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. Un fabricante puede tener una utilidad de 40 dólares en cada artículo si se producen semanalmente no más de 1 600 artículos; la utilidad decrece 4 centavos por artículo que sobrepase los 1 600; ¿cuántos artículos deben fabricarse a la semana para obtener la utilidad máxima?

2. El costo del combustible que consume una locomotora es proporcional al cuadrado de la velocidad y vale 3 200 pesos por hora cuando la velocidad es de 80 km/h, independientemente de la velocidad, el costo por hora se incrementa, por otras causas, en 7200 pesos por hora. Calcula la velocidad a la que debe ir la locomotora para que el costo por kilómetro sea mínimo.

3. Una cantidad bancaria tiene las siguientes tarifas: 30 pesos por cada mil para operaciones de hasta 50 000 pesos; para la cantidad que sobrepase esta cifra, disminuye la tasa anterior en 0.375 pesos por cada mil; hallar la operación óptima de manera que el beneficio del banco sea máximo.

4. El costo total de producción de x unidades diarias de un producto es de $\left(\frac{x^2}{4} + 35x + 25\right)$ dólares y el precio de venta de una de ellas es de $\left(50 - \frac{x}{2}\right)$ dólares.

5. Un fabricante vende cada una de sus radiograbadoras en 90 dólares; el costo de fabricación y venta de x aparatos por semana es: $C = 2000 + 15x + 0.0010x^2$, ¿si se pueden producir 12 000 radiograbadoras por semana, cuántos aparatos deben fabricarse y venderse para que la utilidad semanal sea máxima?
6. La distancia en autobús desde Reynosa, Tamaulipas, hasta Cerro Azul, Veracruz, es de 675 km. Al conductor del autobús se le paga 37.50 pesos la hora, mientras que los costos de llevar al autobús a una velocidad estable de x kilómetros por hora asciende a $270 + 1.5x$ centavos por kilómetro; las velocidades mínima y máxima legales en la ruta del autobús son 80 y 100 km/h, ¿a qué velocidad fija se debe conducir el autobús para que el costo total sea mínimo?
7. Una compañía puede vender x calculadoras por semana si cobra $100 - 0.1x$ dólares por calculadora; su costo de producción es $30x + 5000$ dólares cuando se producen x calculadoras por semana, ¿cuántas calculadoras se deberán producir para maximizar la utilidad y cuál será el precio de venta por calculadora?.
8. Un viaje turístico cuesta por persona 250 dólares para cualquier número de turistas por arriba de 100; el viaje se cancela si hay menos de 50 turistas; sin embargo, por cada turista por arriba de 100, el precio por persona disminuye un dólar; el número máximo de turistas es de 225, ¿cuántos turistas producirán el máximo ingreso?
9. A una compañía le cuesta $0.1x^2 + 4x + 3$ dólares producir x toneladas de cemento; si se producen más de 10 toneladas, la mano de obra adicional eleva el costo en $2(x - 10)$ dólares. Si el precio por toneladas es de 9 dólares, sin importar el nivel de producción y si la capacidad máxima de producción es de 20 toneladas, ¿qué producción maximiza la utilidad?
10. Una empresa estima que el costo para producir x unidades de un cierto producto viene dado por ($C = 800 + 0.04x + 0.0002x^2$) dólares; determina el nivel de producción que minimiza el costo medio por unidad; compara este costo medio mínimo con el costo medio cuando se produccen 400 unidades.
11. Un comerciante, en la promoción de cierto artículo descubre que la demanda del artículo se representa por:

$$x = \frac{2500}{p^2}$$

Supón que el ingreso total R está dado por $R = xp$ y que el costo de producción de x artículos está dado por $C = 0.5x + 500$, determina el precio por unidad que da un beneficio máximo.

12. Una empresa publicitaria gasta x cantidad en cientos de dólares y sea P el beneficio, es decir: $P = 230 + 20x - \dfrac{x^2}{2}$, ¿qué cantidad de publicidad da el beneficio máximo?

Formas indeterminadas del cálculo infinitesimal

Determinación del valor de la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$

Si una función dada de la forma $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ es tal que si $f(a) = 0$ y $g(x) = 0$, la función presenta la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ para determinar el $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, se emplea la igualdad:

$$\left.\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \right\} \quad \text{Regla de L' Hôpital}$$

Regla de L' Hôpital para determinar el valor de la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$

Dada la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$ se determina la derivada del numerador y del denominador, con el fin de obtener un nuevo numerador y un nuevo denominador. El valor límite de la nueva fracción, para el valor asignado de la variable, será el valor límite de la fracción original.

Si la primera derivada también presenta la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$, será necesario determinar la segunda derivada y puede ser necesario llegar a la enésima derivada, es decir, hasta eliminar la forma indeterminada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x} = 3$.

Solución

Sean $\quad f(x) = \text{sen } 3x \ \text{ y } \ g(x) = x \quad \}$ Al derivar, se tiene:

$$f'(x) = 3 \cos 3x \ \text{ y } \ g'(x) = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Al sustituir en la ecuación} \\ \text{de la regla de L' Hôpital} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \cos 3x}{1}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{3 \cos 3(0)}{1} = \lim_{x \to 0} \ 3 \cos 0 = \lim_{x \to 0} \ 3(1) = 3 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Nota: El problema anterior se resuelve de la siguiente manera:

a) Para eliminar la indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$, es necesario multiplicar numerador y denominador por una misma cantidad para que la expresión no se altere; por ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}\left(\frac{3}{3}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{3 \text{ sen } 3x}{3x}$$

b) Si establecemos el teorema para el límite de funciones trigonométricas, por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}=1$$

Si este principio se aplica en el límite que estamos analizando, resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\text{ sen }3x}{3x} \qquad \lim_{x\to 0}3(1)=3 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Lo anterior se demuestra si $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{3x}=1$.

2 ●●• Demuestra que $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 7x}{3x}=\frac{7}{3}$.

Solución

a) Al aplicar el teorema $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 7x}{3x}\left(\frac{7}{7}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{7\text{ sen }7x}{(3)7x}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{3}(1)=\frac{7}{3} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

b) Al aplicar la regla de L′ Hôpital

Sean: $f(x)=\text{sen } 7x$ y $g(x)=3x$ } Al derivar, se tiene:

$f'(x)=\cos 7x$ y $g'(x)=3$ } Al sustituir en la ecuación de la regla de L′ Hopital

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos 7x}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos 7(0)}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos 0}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7(1)}{3}=\frac{7}{3} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

3 ●●• Demuestra que $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x}=\frac{3}{2}$.

Solución

a) Al aplicar el teorema $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen } x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x}\left(\frac{3x}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x\text{ sen }3x}{3x\text{ sen }2x}\left(\frac{2x}{2x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cancel{x}\text{ sen }3x}{3x}\cdot\frac{2x}{2\cancel{x}\text{ sen }2x}=\lim_{x\to 0}3(1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

b) Al aplicar la regla de L′ Hôpital

Sean: $f(x)=\text{sen } 3x$ y $g(x)=\text{sen } 2x$ } Al derivar se tiene:

$f'(x)=3\cos 3x$ y $g'(x)=2\cos 2x$ } Sustituyendo en la ecuación de la regla de L′ Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 0}{2\cos 0}=\lim_{x\to 0}\frac{3(1)}{2(1)}=\frac{3}{2}\qquad \text{L.C.D.D.}$$

Determinación del valor de la forma indeterminada $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Si una función dada de la forma $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ es tal que si $f(a)=\infty$ y $g(x)=\infty$, la función presenta la forma indeterminada $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Para hallar el $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ la regla de L′ Hôpital sigue siendo válida para este límite, el proceso consiste en adecuar la fracción dada a la forma indeterminada de $\left(\frac{0}{0}\right)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$.

Solución

Sean: $f(x)=x^2$ y $g(x)=e^x$ } Derivando, tenemos:

$f'(x)=2x$ y $g'(x)=e^x$ | Sustituyendo en la ecuación de la regla de L′Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{2(+\infty)}{e+\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

Como se sigue presentando la indeterminación $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ se hace necesario repetir la aplicación de la regla de L′ Hôpital. Por lo tanto, $f''(x)=2$ y $g''(x)=e^x$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}=\frac{2}{e^x}=\frac{2}{e\infty}=\frac{2}{\infty}=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\qquad \text{L.C.D.D.}$$

2 Demuestra que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\csc x}=0$.

Solución

Sean: $f(x)=\ln x$ y $g(x)=\csc x$ } Derivando tenemos:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\quad \text{y}\quad g'(x)=-\csc x\cot x$$

Sustituyendo en la ecuación de la regla de L' Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\csc\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc\ x\ \cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{\text{sen}\ x}\right)\left(\frac{\cos\ x}{\text{sen}\ x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos\ x}{\text{sen}\ x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen}^2 x}{x\cos x}=\frac{-\text{sen}^2 0}{(0)\cos(0)}=\frac{0}{0}$$

Como se sigue presentando la indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$, se hace necesario repetir la aplicación de la regla de L' Hôpital

Sean:

$$f'(x)=-\text{sen}\ 2x \ \text{ y } \ g'(x)=x\cos x$$
$$f''(x)=-2\text{sen}\ x\cos x \ \text{ y } \ g''(x)=x(-\text{sen}\ x)+\cos\ x$$
$$g''(x)=\cos\ x-x\ \text{sen}\ x$$

Sustituyendo en la regla de L' Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\csc\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen}^2\ x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\ \text{sen}\ x\cos x}{\cos\ x-x\ \text{sen}\ x}=\frac{-2\ \text{sen}\ (0)\cos(0)}{\cos(0)-(0)\ \text{sen}\ (0)}$$

$$=\frac{-2(0)(1)}{1-0}=\frac{\mathbf{0}}{1}=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\csc\ x}=0 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Determinación del valor de las formas indeterminadas $(\mathbf{0})(\infty)$ y $(\infty-\infty)$

Aplicando la regla de L' Hôpital estas formas se pueden transformar a cualesquiera de las formas indeterminadas anteriores, es decir, $\left(\frac{0}{0}\right)$ y $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x \csc x = 1$.

Solución

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x \csc x = \operatorname{arcsen}(0)\csc(0) = (0)(\infty)$$

Sustituyendo directamente el valor de la variable en el límite, se presenta la forma indeterminada $(0)(\infty)$; antes de aplicar la regla de L′ Hôpital, debemos transformar la expresión, de tal manera que se presente la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x \csc x = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x}$$

Por la identidad trigonométrica: $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{arcsen}(0)}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0}$$

Para lo cual se aplica la regla L′ Hôpital, lo que resulta:

Sean:

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x \quad \text{y} \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad g(x) = \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo en la regla mencionada:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x \csc x = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-(0)^2}\,\cos(0)} = \frac{1}{(1)(1)} = 1 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

2 Demuestra que $\lim_{x\to 2\pi}(\csc x - \cot x) = 0$.

Solución

$$\lim_{x\to 2\pi}(\csc x - \cot x) = \csc 2\pi \cot 2\pi = \infty - \infty$$

Sustituyendo directamente el valor de la variable en el límite, se presenta la forma indeterminada $(\infty - \infty)$; antes de aplicar la regla L′ Hôpital, debemos transformar la expresión, de tal manera que se presente la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to 2\pi}(\csc x-\cot x)=\lim_{x\to 2\pi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$$

Por las identidades trigonométricas:

$$\csc=\frac{1}{\operatorname{sen} x}\text{ y }\cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{1-\cos 2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Para lo cual se aplica la regla L'Hôpital, resultando:

$$\text{Sean } f(x)=1-\cos x \quad\text{y}\quad g(x)=\operatorname{sen} x$$
$$f'(x)=\operatorname{sen} x \qquad g'(x)=\cos x$$

Sustituyendo en la regla mencionada:

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 2\pi}(\csc x-\cot x)=\lim_{x\to 2\pi}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$
$$=\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{\cos 2\pi}=\frac{0}{1}=0 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

3 Demuestra que $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-2x}=0$.

Solución

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-2x}=(\infty)^2\ (e)^{-2\infty}=(\infty)(0)$$

Sustituyendo directamente el valor de la variable en el límite, se presenta la forma indeterminada $(\infty)(0)$; antes de aplicar la regla de L′ Hôpital, debemos transformar la expresión, de tal manera que se presente la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\frac{(\infty)}{(e)^{2\infty}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L′ Hôpital, resulta:

$$\text{Sean } f(x)=x^2 \quad\text{y}\quad g(x)=e^{2x}$$
$$f'(x)=2x \qquad g'(x)=2e^{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}e^{2\infty}}=\lim\frac{x^2}{e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Como se sigue presentando la indeterminación $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, se hace necesario repetir la aplicación de la regla de L′ Hôpital.

Sean:

$$f'(x) = x \quad \text{y} \quad g'(x) = e^{2x}$$
$$f''(x) = 1 \qquad g''(x) = 2e^{2x}$$

Sustituyendo en la regla de L' Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{2e^{2\infty}}$$

$$= \frac{1}{2(\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Determinación del valor de las formas indeterminadas (0^0), (∞^0) y (1^∞)

Si una función de la forma $f(x)^{g(x)}$se presenta como cualesquiera de las tres formas indeterminadas, para cierto valor de x, es decir:

a) $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$, resultando (0^0).

b) $f(x) = \infty$ y $g(x) = 0$, resultando (∞^0).

c) $f(x) = 1$ y $g(x) = \infty$, resultando (1^∞).

Empleando logaritmos naturales en ambos miembros de la función dada resulta:

$$y = f(x)^{g(x)}$$
$$\ln y = g(x) \quad \}\ \text{Aplicando las propiedades de los logaritmos resulta:}$$
$$\ln y = g(x)\ \ln\ f(x)$$

Determinando el límite de la función anterior, presentará la forma indeterminada $(0)(\infty)$; antes de aplicar la regla de L' Hôpital, debemos transformar la expresión, de tal manera que se presente la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim_{x\to 0} x^{\tan x} = 1$.

Solución

$$\lim_{x\to 0} x^{\tan x} = (0)^{\tan^{\pi}} = 0^0$$

Sustituyendo directamente el valor de la variable en el límite se presenta la forma indeterminada (0^0)

Empleando logaritmos naturales en ambos miembros de la función dada, resulta:

$$y = x^{\tan x}$$
$$\ln y = \ln x^{\tan x}$$
$$\ln y = \tan x \ln x$$

Determinando el límite de la función anterior, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln \tan(0) \ln(0) = (0)(\infty)$$

Al presentarse la forma indeterminada $(0)(\infty)$, debemos transformar la expresión, de tal manera que se presente la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, a la cual le aplicaremos la regla de L' Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \tan x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \frac{\ln(0)}{\cot(0)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L' Hôpital.

$$\text{Sean: } f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \cot x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(x) = -\csc^2 x$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{0}{0}$$

Al presentarse la indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$, se hace necesario repetir la aplicación de la regla de L' Hôpital.

$$\text{Sean } f'(x) = -\operatorname{sen}^2 x \quad \text{y} \quad g'(x) = x$$
$$f''(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad g''(x) = 1$$

Sustituyendo en la regla tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cos x}{1}$$
$$\lim_{x\to 0} 2 \operatorname{sen}(0) \cos(0) = -2(0)(1) = 0$$

Sustituyendo este valor en el límite del logaritmo natural, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \ln\ y = 0, \text{ es decir: } \lim_{x\to 0}\ y = \lim_{x\to 0}\ x^{\tan x} = e^x = 1 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

2 Demuestra que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x} = 1$.

Solución

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x} = \left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}} = (\infty^0) \quad \Bigg\}$$ Sustituyendo directamente el valor de la variable en el límite se presenta la forma indeterminada (∞^0).

Empleando logaritmos naturales en ambos miembros de la función dada, resulta:

$$y = (\tan x)^{\cos x}$$
$$\ln\ y = \ln\ (\tan x)^{\cos x}$$
$$\ln\ y = \cos x\ \ln\tan x$$

Determinando el límite de la función anterior, resulta:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x\ \ln\tan x = \cos\frac{\pi}{2} = (0)\ \ln(\infty) = (0)(\infty)$$

Al presentarse la forma indeterminada $(0)(\infty)$, debemos transformar la expresión, de tal manera que se presente la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, a la cual le aplicaremos la regla de L′ Hôpital.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos\ x\ \ln\ \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\tan x}{\text{sen } x} = \frac{\ln\tan\frac{\pi}{2}}{\sec\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L′ Hôpital.

Sean: $f(x) = \ln\ \tan x$ y $g(x) = \sec x$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\tan x}\right)^{\sec^2 x} \qquad g'(x) = \sec\ x\ \tan x$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\tan x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2}{\tan x}}{\sec x\ \tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} = \frac{\sec^2 x}{\cancel{\sec x}\ \tan^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan^2 x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Al presentarse la indeterminación $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, se hace necesario repetir la aplicación de la regla L' Hôpital.

$$\text{Sean: } f'(x)=\sec\ x \qquad \text{y} \qquad g'(x)=\tan^2\ x$$
$$f''(x)=\sec\ x\ \tan x \qquad g''(x)=2\ \tan x\ \sec^2\ x$$

Sustituyendo en la regla, se tiene:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\ \tan x}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan^2\ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\sec x}\ \ \cancel{\tan x}}{2\,\cancel{\tan x}\ \ \cancel{\sec^2} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\ \sec x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2}=\frac{\cos\ \frac{\pi}{2}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Sustituyendo este valor en el límite del logaritmo natural, se tiene:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\ y=0, \text{ es decir: } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}=e^0=1 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

3 Demuestra que $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}=1.$

Solución

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}=[\cos\ (0)]^{\frac{1}{0}}=(1^\infty)$$ Sustituyendo directamente el valor de la variable en el límite se presenta la forma indeterminada (1^∞) .

Empleando logaritmos naturales en ambos miembros de la función dada resulta:

$$y=(\cos\ x)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ln\ y=\ln\ (\cos x)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ln\ y=\frac{1}{x}\ \ln \cos x=\frac{\ln \cos x}{x}$$

Determinando el límite de la función anterior, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \ln y=\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x}=\frac{\ln \cos\ (0)}{0}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$$

Al presentarse la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$, se aplica la regla de L' Hôpital, resultando:

$$\text{Sean: } f(x)=\ln\ \cos x \qquad \text{y} \qquad g(x)=x$$
$$f'(x)=\left(\frac{1}{\cos\ x}\right)(-\operatorname{sen} x) \qquad g'(x)=1$$
$$f'(x)=-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Sustituyendo en la regla, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1}=\lim_{x\to 0}(-\tan x)=(-\tan 0)=0$$

Sustituyendo este valor en el límite del logaritmo natural, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=0,\text{ es decir: }\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1 \qquad \text{L.C.D.D.}$$

EJERCICIO 24

I. En grupo y con asesoría de su profesor, demuestren los siguientes límites que presentan las formas indeterminadas $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0)(\infty)$, $(\infty-\infty)$, (0^0), (∞^0) y (1^∞), aplicando la regla de L' Hôpital.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen} 2x}{\ln\operatorname{sen} x}=1$
3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec x-\tan x=0$
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=2$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}=2$
6. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=-1$
7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{3}{2}$
8. $\lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{1}{\ln z}\right)=\frac{1}{2}$
9. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$
10. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}=\frac{8}{9}$
12. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen} x)^{\tan x}=1$
13. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsen x}{\operatorname{sen}^3 x}=-\frac{1}{6}$
14. $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^2$
15. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}=\frac{1}{2}$
16. $\lim_{x\to 1}(x)^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}=\frac{1}{e}$
17. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\frac{1}{3}$
18. $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=e^5$
19. $\lim_{x\to 0}x\ln\operatorname{sen} x=0$
20. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$
21. $\lim_{x\to\infty}x\operatorname{sen}\frac{4}{x}=4$
22. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$
23. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\csc 6x}{\csc 8x}=\frac{1}{3}$
24. $\lim_{x\to 0}x^x=1$
25. $\lim_{x\to 0}x\csc x=1$
26. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}=9$
27. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+3x}{4e^x+2x^2}=\frac{1}{4}$
28. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\cot x}=e$
29. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{1-\cos x}\right)=-\frac{1}{3}$
30. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=1$

II. Aplicando la regla de L' Hôpital, determina los siguientes límites que presentan las formas indeterminadas $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0)(\infty)$, $(\infty-\infty)$, (0^0), (0^0) y (1^∞) y en plenaria discute tus resultados.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\tan 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x-\cos x)^{\tan x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\ln x}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \csc \pi x \ln x$
9. $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8^x-2^x}{4x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x \csc x$
12. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x-\pi}}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$
15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{x-\operatorname{sen} 2x}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$
18. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2} \tan \frac{\pi x}{4}$
19. $\lim\limits_{x\to 0} x \csc 2x$
20. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2}$
21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec 5x-\tan x)$
22. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\cot x}$
23. $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\ln x}$
24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cot 2x}{\cot 3x}$
25. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{\log(x+1)}-\frac{1}{x}\right]$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Diferenciales

La notación de derivada para la función $y=f(x)$ es:

$$y'=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

en donde el símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$\Delta x \to 0$.

Si la derivada de $f(x)$ es $f'(x)$ para un valor específico de la variable independiente x y su incremento Δx; la diferencial de la función dada se denota por el símbolo $df(x)$, y se define por la expresión:

$$df(x)=f'(x)\Delta x=\frac{dy}{dx}\Delta x$$

Cuando $f(x) = x$, su derivada es $f'(x) = 1$, sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$d(x) = 1(\Delta x)$$

$$dx = \Delta x \quad \} \text{ Diferencial de la variable independiente.}$$

Si $y = f(x)$ resulta que la expresión se representa como:

$$dy = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

Definición

La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por el incremento o diferencial de la variable independiente.

Ejemplos

1. Encuentra la diferencial para la función $y = 3x^2$.

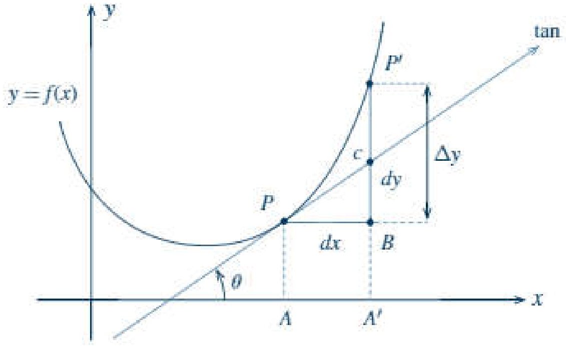
$$\text{Si } y = 3x^2$$
$$dy = 6x\,dx$$

2. Calcula la diferencial de la función $y = 5x^3$ para $x = 2$ y $\Delta x = dx = 0.02$.

$$y = 5x^2$$
$$dy = 15x^2\,dx$$
$$dy = 15(2)^2(0.02)$$
$$dy = 1.2$$

Interpretación geométrica de la diferencial

Al analizar el significado de diferencial gráficamente se tiene:



Sea $y = f(x)$ la función dada y su diferencial $f'(x)$, que se identifica como el valor de la derivada en P; si el incremento de la variable independiente $\Delta x = dx = PB$ y con base en la definición de diferencial resulta:

$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)\,dx$$

Recordando que el valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto, tenemos:

$$dy = f'(x)\,dx$$
$$dy = \tan\theta(PB)$$

Con base en la gráfica se tiene:

$$\tan\theta = \frac{BC}{PB} \begin{array}{l} \leftarrow \text{cateto opuesto} \\ \leftarrow \text{cateto adyacente} \end{array}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$dy = \tan\theta(PB)$$
$$dy = \frac{BC}{\cancel{PB}}(\cancel{PB}) = BC \quad \left.\right\} \begin{array}{l} \text{Representa el incremento de la ordenada} \\ \text{de la tan correspondiente a } dx. \end{array}$$

Si dx representa un incremento cualesquiera de la variable independiente x para un punto $P(x, y)$ de la curva $y = f(x)$ tiene por derivada:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan\theta$$

Por lo general, la diferencial de la función (dy) y el incremento (Δy) no son iguales. Por ejemplo, de la gráfica tenemos que:

$$dy = BC \;\; \} \;\text{Incremento de la ordenada de la tan en } P.$$
$$\Delta y = BP' \;\; \} \;\text{Incremento de la ordenada de la función de } P \text{ a } P'.$$

La diferencial como aproximación del incremento

Si el incremento de la variable independiente dx es muy pequeño, entónces dy y Δy son aproximadamente iguales, es decir, según la gráfica anterior se tiene:

$$\text{Si } dx = PB \text{ es muy pequeño, } dy = BC = \Delta y = BP'$$

Cuando sólo es necesario obtener un valor aproximado del incremento de la función, calcular el valor de la diferencial será suficiente para resolver el problema.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula un valor aproximado para $\sqrt{85}$.

Solución

Sean: $y = \sqrt{x}$ la función representativa de $\sqrt{85}$.

$x = 81$ por ser un valor próximo al dado y que tiene raíz cuadrada exacta $dx = \Delta x = 4$ incremento de x para tener 85.

$$y = \sqrt{x}$$
$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$dy = \frac{4}{2\sqrt{81}} = \frac{2}{9} = 0.222$$

$$\text{Si } y = \sqrt{x} = \sqrt{81} = 9$$
$$\sqrt{85} = y + dy$$
$$\sqrt{85} = 9 + 0.222$$
$$\therefore \quad \sqrt{85} \approx 9.222$$

Si realmente $\sqrt{85} = 9.219$ el valor determinado es mayor que el real en 0.003 unidades.

2 Encuentra una fórmula aproximada del área de una corona circular de radio (r) y ancho (dr), ¿cuál es la fórmula exacta?

Solución

Sean: $A = \pi r^2$ el área del círculo

$dA =$ representa la fórmula aproximada

$\Delta A =$ reprenta la fórmula exacta

$$\text{Si} \quad A = \pi r^2$$
$$dA = 2\pi r\ dr \quad \Big\} \text{ Fórmula aproximada}$$

Por la regla de los cuatro pasos se tiene:

$$A = \pi r^2$$
$$\cancel{A} + \Delta A = \pi(r + \Delta r)^2$$
$$\cancel{-A} = -\pi r^2$$
$$\Delta A = \cancel{\pi r^2} + 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2 \cancel{-\pi r^2}$$
$$\Delta A = \Delta r(2\pi r + \pi \Delta r)$$
$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\cancel{\Delta r}\,(2\pi r + \pi \Delta r)}{\cancel{\Delta r}}$$
$$\therefore \quad \Delta A = (2\pi r + \pi \Delta r)\Delta r \quad \Big\} \text{ Fórmula exacta}$$

3 Encuentra una fórmula aproximada para el volumen de una cáscara cilíndrica delgada de extremidades abiertas, donde el radio se representa por (r), la altura como (h) y el espesor como (e).

Solución

Sean:

$V = \pi r^2 h$, volumen del cilindro

$e = dr$, espesor de la cáscara

$$V = \pi r^2\ h$$
$$dv = 2\pi r\, h\, dr \quad \Big\} \text{Fórmula aproximada}$$
$$\text{o } dv = 2\pi r\, h\, e$$

4 ••Calcula un valor aproximado de sen 32° empleando diferenciales.

Solución

Sean: $y = \text{sen}\, x$ la función representativa de sen 32°

$x = 30°$ por ser un valor próximo al dado, ya que sen 30° = 0.5

$dx = 2°$ incremento de x para tener 32°

$2° = 0.034906$ radianes

$$y = \text{sen}\, x$$

$$dy = \cos x\, dx$$

$$dy = \cos 30°(0.034906)$$

$$dy = (0.8660)(0.034906) = 0.030228$$

Si $y = \text{sen}\, 30° = 0.5$, se tiene:

$$\text{sen}\, 32° = y + dy$$

$$\text{sen}\, 32° = 0.5 + 0.030228 = 0.530228 \text{ rad}$$

Si realmente sen 32° = 0.529919 rad el valor determinado es mayor que el real en 0.000309 unidades.

Fórmulas fundamentales para determinar las diferencias de funciones

Las fórmulas fundamentales para determinar las diferenciales son las mismas fórmulas que empleamos para determinar las derivadas, tan sólo será necesario multiplicar cada una por dx; por ejemplo:

1. $d(c) = 0$
2. $d(x) = dx$
3. $d(u + v - w) = du + dv - dw$
4. $d(cv) = c\, dv$
5. $d(uv) = u\, dv + v\, du$

5a. $ad(uvw) = uv\, dw + uw\, dv + vw\, du$

6. $d(v^n) = nv^{n-1}\, dv$

6a. $d(x^n) = nx^{n-1}\, dx$

7. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

7a. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du}{c}$

7b. $d\left(\frac{c}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}du$

8. $d\left(\sqrt[n]{v}\right) = \frac{dv}{nv\frac{n-1}{n}}$

11. $d(|v|) = \frac{v}{|v|}dv$

12. $d(\ln v) = \frac{dv}{v}$

12a. $d(\ln v) = \frac{dx}{x}$

13. $d(\log v) = \frac{\log e}{v}dv$

13a. $d(\log x) = \frac{\log e}{x}dx$

14. $d(a^v) = a^v \ln a\, dv$

14a. $ad(a^x) = a^x \ln a\, dx$

15. $d(e^v) = e^v\, dx$

15a. $d(e^x) = e^x\, dx$

16. $d(u^v) = vu^{v-1}\, du + u^v \ln u\, dv$

17. $d(\text{sen}\, v) = \cos v\, dv$

18. $d(\cos v) = -\text{sen}\, v\, dv$

19. $d(\tan v) = \sec 2\, v\, dv$
20. $d(\cot v) = -\csc^2 v\, dv$
21. $d(\sec v) = \sec v \tan v\, dv$
22. $d(\csc v) = -\csc v \cot v\, dv$
23. $d(\text{arcsen}\, v) = \dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$
24. $d(\arccos v) = \dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$
25. $d(\arctan v) = \dfrac{dv}{1+v^2}$
26. $d(\text{arccot}\, v) = -\dfrac{dv}{1+v^2}$
27. $d(\text{arcsec}\, v) = \dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$
28. $d(\text{arccsc}\, v) = \dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$

Nota: las fórmulas 9 y 10 no son diferenciables, ya que son casos especiales de derivación.

Para determinar la diferencial de una función, el proceso más sencillo establece el determinar la derivada y después multiplicar por dx.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = 5x - 5x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 5 - 15x^2$$

$$\therefore\ dy = 5(1-3x^2)\, dx$$

2. $y = \sqrt{4-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}$$

$$\therefore\ dy = -\frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

3. $y = \ln(a^2 - x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(a^2-x^2)}$$

$$\therefore\ dy = -\frac{2x\, dx}{(a^2-x^2)}$$

4. $y = 2x \tan x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\sec^2 x^2(2x) + \tan x^2(2)$$

$$\therefore\ dy = (4x^2 \sec^2 x^2 + 2\tan x^2)\, dx$$

5. $y = \text{arccsc}\, 2x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x\sqrt{4x^2-1}}$$

$$\therefore\ dy = -\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$$

EJERCICIO 25

I. En equipos de dos personas, calculen la diferencial para las siguientes funciones para el valor dado de la variable independiente y su incremento. Socialicen el proceso de solución.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $y = 3x^2 - 8x + 5$, cuando $x = 1$ y $dx = 0.1$
2. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, cuando $x = 4$ y $dx = 0.02$
3. $y = x^2$, cuando $x = -1$ y $dx = 0.25$
4. $y = 2x^3$, cuando $x = -2$ y $dx = -0.5$

5. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, cuando $x = 2$ y $dx = 0.1$

6. $y = x\sqrt{1-x^2}$, cuando $x = 0.75$ y $dx = 0.001$

7. $y = \tan x$, cuando $x = 45°$ y $dx = 0.03528$ rad.

8. $y = \cos x$, cuando $x = 30°$ y $dx = -0.02139$ rad.

9. $y = \operatorname{arcsen} 2x$, cuando $x = 3$ y $dx = 0.045$

10. $y = \ln x^2$, cuando $x = 5$ y $dx = 0.0083$

II. Resuelve los siguientes problemas, empleando diferenciales y en plenaria discute tus resultados.

1. Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta desde 12 a 12.03 cm, encuentra el valor aproximado del incremento del área.
2. Si A es el área de un cuadrado de lado 8 cm, determina dA y construye una gráfica que represente dA y ΔA.
3. Encuentra el volumen aproximado de un tubo de cobre de 35 cm de longitud, 2 cm de diámetro interno y 3 mm de espesor.
4. Determina un valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de 300 mm de diámetro externo y 1.5 mm de espesor.

III. Aplicando diferenciales, determina los valores para las siguientes expresiones.

1. $\sqrt[3]{65}$
2. $\sqrt{37}$
3. $\sqrt[4]{83}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{63}}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{50}}$
6. $\sqrt{78}$
7. $\sqrt[4]{\dfrac{17}{81}}$
8. sen $61°$
9. $\cos 44°$
10. $\tan 46°$
11. $\cot 29°$
12. $\sec 59°$
13. $\ln 5.83$
14. $\ln 36.4$
15. $e^{2.2}$
16. $e^{5.1}$

IV. Determina la diferencial para las siguientes funciones.

1. $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x$
2. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$
3. $y = \sqrt{1-3x^2}$
4. $y = \sqrt{a^2 + x^2}$
5. $y = \sqrt[3]{4-2x^2}$
6. $y = 3x\sqrt{x^2+4}$
7. $y = (1+x^2)\sqrt{1-x^2}$
8. $y = 10^{2x2}$
9. $y = 5^{mx}$
10. $y = e^{bx}$
11. $y = e^{\sqrt{x}}$

12. $y = \ln(4 - 3x)$
13. $y = \ln\sqrt{1+x^2}$
14. $y = \ln \operatorname{sen} 2x$
15. $y = \log(ax + b)$
16. $y = \log\sqrt{4-x^2}$
17. $y = 2\cos 2x$
18. $y = \dfrac{\tan 4x}{4}$
19. $y = x \csc x$
20. $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2}$
21. $y = \arctan(x^2 - 1)$
22. $y = \operatorname{arcsec} x^2$
23. $y = \sqrt{\cos 5x}$
24. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
25. $y = \sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$
26. $y = e^{-2x}\cos 3x$
27. $3x^2 + 2xy + 5y^2 = 24$
28. $x^3 + 6xy^2 + 2y^3 = 10$
29. $x^2 + 4\sqrt{xy} + 2y = a$
30. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = C$
31. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$
32. $x - y = e^{x+y}$
33. $2x^3 - xy^2 + 6y = 1$
34. $y = \dfrac{5-x^2}{5+x}$
35. $y = \arccos(3x - 4x^3)$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Dada la curva $y = 27x^3 - 8x^2 + 15$, determina: a) la inclinación de θ cuando $x = 2$ y b) los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje x.

2. En las siguientes funciones, determina los intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes y construye sus graficas correspondientes.

   a) $y = \dfrac{7-x}{x^2}$

   b) $\dfrac{4}{\sqrt{x}} = \sqrt{81x} - y$

3. Calcula los máximos y mínimos de:

   a) $y = 13x^4 + 8x^3 - 24y^2$

   b) $y = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}x$

c) $y = 2\cos 4x$

4. Encuentra la diferencial de las siguientes funciones.

   a) $y = \ln\cos\sqrt{x}$

   b) $y = \dfrac{16x-4}{x^2}$

   c) $y = 20e^{\tan x}$

5. Encuentra la diferencial de las siguientes funciones para el valor dado de la variable independiente y su incremento.

   a) $y = \operatorname{sen} 3x$ cuando $x = 30°$ y $dx = 0.02139$ rad.

   b) $y = 6x\sqrt{1-x^4}$ cuando $x = 0.55$ y $dx = 0.0001$.

Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos

Unidad 1

Ejercicio 1

(I). 1. El cálculo infinitesimal estudia las aplicaciones de cálculo diferencial e integral.

3. Los fundadores del cálculo diferencial son Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

5. Nicolás Oresme estableció que en la proximidad del punto de una curva en que la ordenada se considera máxima o mínima dicha ordenada varía más pausadamente.

7. Newton, en el método de las fluxiones estudiaba las magnitudes variables introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo, las cuales se denominaban fluentes. Todos los fluentes son variables dependientes que tienen un argumento común.

9. Cauchy aportó las definiciones de *función de función y función compuesta.*

Ejercicio 2

(I). 1. Es la correspondencia de cada elemento de un conjunto con respecto a uno o más elementos de un segundo conjunto.

3. La función es la regla por la cual se relacionan los elementos de un conjunto con otro.

5. A $f(x)$ se le denomina el valor de la función de x. El cual se lee f de x.

7. Es aquella a la que se le pueden atribuir valores diferentes y que solo en un determinado problema permanecerá contante el valor asignado, es decir, son cantidades que cambian de valor de un problema a otro, pero a lo largo de un problema no cambian.

9. Es la primera variable de la función cuyo valor se determina al asignarle un valor específico a la variable independiente.

11. Son los valores posibles entre los extremos del intervalo que una variable puede tomar.

13. La notación usada para representar a un intervalo abierto es: (a,b) y representa al conjunto de los valores de la variable tales que $a < x < b$.

$$(a,b) = \{x|a < x < b\}$$

15. El dominio de una función es el conjunto de todos los valores de los primeros elementos (x) de los pares ordenados y se denota por *Domf.* El rango de una función es el conjunto de todos los valores de los segundos elementos (y) de los pares ordenados y se denota por *Ranf.*

Ejercicio 3

(I). 1. *a*) El costo de la cantidad que se compra de tortillas depende del peso de tortillas que adquieres.

b) El costo del servicio del gas natural depende del volumen de metros cúbicos que se utilicen.

c) La cantidad de detergente usado en una lavadora depende de la cantidad de ropa a lavar.

3. Una función algebraica es aquella que está formada por un número finito de operaciones algebraicas, dígase suma, resta, multiplicación, división, elevación de potencias, etcétera.

5. Una función racional es aquella que se puede expresar como el cociente de dos funciones polinomiales.

7. Una función entera se expresa como un arreglo de variables sin tener a alguna en el denominador y no está afectada por exponentes negativos.

9. Función cuártica.

11. Es aquella en la cual la variable independiente está involucrada directamente con las operaciones indicadas que al efectuarse determinan el valor de la función.

13. Es aquella en la cual la relación de la variable dependiente con respecto a la variable dependiente se indica con una sola operación.

15. Es una función en la que y no se define directamente como función de x, sino que se da como función de otra variable u la cual se define como función de x por medio de u.

17. Es aquella función f en la que todos los valores de la varibale independiente llamado dominio de f satisface la condición $f(-x)=-f(x)$.

19. Se determina por la ecuación $f(x)=[x]$, en donde el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y su rango es el conjunto de los enteros como regla de correspondencia, es decir, $[x]$ es la parte entera no mayor que x.

21. Es aquella en la cual la variable independiente se ubica como exponente de una constante denominada base y que se denota por la ecuación $f(x)=a^x$.

23. Es aquella cuyo valor depende de un ángulo en la expresión trigonométrica del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante; se denota por:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\text{sen } x & f(x)=\cot\ x \\ f(x)=\cos x & f(x)=\sec x \\ f(x)=\tan x & f(x)=\csc x \end{array}$$

25. Es aquella cuyo dominio es el conjunto de los números reales y su rango se limita a la siguiente regla de correspondencia; se denota por $f(x)=|x|$, es decir,

$$|x|=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ x \text{ si } x<0 \end{cases}$$

(II). 1. *a)* Función polinomial de quinto orden, explícita, continua e impar.

b) Función exponencial continua y explícita.

c) Función circular directa, continua, explícita y par.

d) Función irracional compuesta por una función polinomial, cúbica y continua.

e) Función fraccionaria, implícita y discontinua para $x=-\dfrac{2}{3}$.

f) Función implícita cuadrática y continua.

g) Función polinomial implícita discontinua cuando $x=0$.

h) Función circular directa, continua, explícita y par.

i) Función escalón constante.

j) Función constante.

k) Función polinomial lineal, explícita y continua.

l) Función signo explícita.

m) Función explícita y escalón.

n) Función explícita compuesta de la función signo con la función polinomial cuadrática, continua y par.

ñ) Función compuesta explícita compuesta de la función logaritmo con la función polinomial lineal discontinua e impar.

o) Función explícita, polinomial, cuadrática y continua.

p) Función explícita, polinomial, cúbica y continua.

q) Función identidad, continua e impar.

r) Función explícita compuesta de la función circular inversa con la función lineal discontinua e impar.

s) Función explícita, función de función.

t) Función compuesta fraccionaria discontinua cuando $x=1$.

u) Función explícita, polinomial cuadrática y continua.

v) Función explícita logaritmo discontinuo.

w) Función explícita, fraccionaria con denominador irracional y numerador de grado cinco.

x) Función explícita, racional y discontinua cuando $x=0$.

y) Función irracional.

z) Función explícita, polinomial cuadrática y continua.

Ejercicio 4

(I). 1. $\sqrt{x+3}$ no es un número real para $x+3<0$, por tanto, el dominio de F son todos los valores de x para los cuales se satisface la condición $x+3\geq 0$; es decir, $x\geq -3$. El cual es representado por el intervalo $[-3,\infty)$, el rango de F es el intervalo $[0,\infty)$.

3. $\sqrt{16-x^2}$ no es un número real para $16-x^2<0$, por tanto, el dominio de H son todos los valores de x para los cuales se satisface la condición $16-x^2\geq 0$; es decir, $-4\leq x\leq 4$. Lo cual es representado por el intervalo $[-4,4]$, el rango de H es el intervalo $[0,4]$.

5. Tanto el dominio de g como el rango de g son todos los números reales.

7. El dominio de ϕ son todos los número reales y el rango de ϕ es el intervalo $[-8,\infty)$.

9. Analizando la función se observa que no está definida en $x=\frac{2}{3}$, por lo tanto, el dominio de G es el conjunto de todos los número reales excepto $\frac{2}{3}$. El rango de G son todos los números reales excepto -4. Si se reescribe la función se obtiene:

$$y=\frac{9x^2-4}{3x+2}=\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x+2}=3x-2, \text{ si } \quad x\neq\frac{2}{3}.$$

11. El dominio de h son todos los número reales y el rango de h es el intervalo $[0,+\infty)$.

13. El dominio de H son todos los número reales y el rango de H es el conjunto $\{-6,-2,4\}$.

15. $\sqrt{9-x^2}$ no es un número real para $9-x^2<0$, por tanto, la función cuando $x\leq 3$ sólo está definida para los valores de x para los cuales se satisface la condición $9-x^2\geq 0$; es decir, $-3\leq x\leq 3$. Lo cual es representado por el intervalo $[-3,3]$.

    Por lo tanto, el dominio de F está dado por el intervalo $[-3,+\infty)$ y el rango de F está definido por $[0,+\infty)$.

17. El dominio de G está definido por los números reales y el rango de G está definido por el intervalo $(-\infty,3]$.

19. El dominio de H son todos los números reales, excepto 0. El rango de la función está definido por el conjunto $\{-1,1\}$.

(II). No se presenta la solución por tratarse de ejercicios gráficos.

EJERCICIO 5

(I). Al identificar los dominios y rangos de las funciones se tiene:

$$Dom f=\{2,3,4,5,6\}; Ran f\,\{0,8,6,2,1\} \qquad \textbf{(1)}$$

$$Dom g=\{0,2,4,6\}; Ran f\,\{5,9,7,3\} \qquad \textbf{(2)}$$

Entonces:

$Dom f\cap Dom g=\{2,4,6\}$ de 1 y 2 se tiene:

a) $f+g=\{(2,9),\ (4,13),\ (6,4)\}$

b) $f\cdot g=\{(2,0),\ (4,42),\ (6,3)\}$

c) $f-g=\{(2,-9),\ (4,-1),\ (6,-2)\}$

d) $\frac{f}{g}=\left\{(2,0),\ \left(4,\frac{6}{7}\right),\ \left(6,\frac{1}{3}\right)\right\}$

e) $f^2=\{(2,0),\ (3,64),\ (4,36),\ (5,4),\ (6,1)\}$

f) $g^2=\{(0,25),\ (2,81),\ (4,49),\ (6,9)\}$

g) $2f+3g=\{(2,27),\ (4,33),\ (6,8)\}$

h) $7f-4g=\{(2,-36),\ (4,14),\ (6,-5)\}$

i) $[2f-g](4)=\{2\cdot 6-7\}=\{5\}$

j) $[f+2g](2)=\{0+2\cdot 9\}=\{18\}$

k) $\frac{5f}{2g}=\left\{(2,0),\left(4,\frac{15}{7}\right),\left(6,\frac{5}{6}\right)\right\}$

l) $\frac{6f-4g}{2g+3}=\left\{\left(2,-\frac{12}{7}\right),\left(4,\frac{8}{17}\right),\left(6,-\frac{2}{3}\right)\right\}$

3. La intersección entre los dominios es:

$Dom\, f \cap Dom g=\{x|x\in[1,4]\}$

Por lo tanto,

a) $f+g=\{(x,f(x)+g(x))|f(x)+g(x)=x^2-9+2x+1;x\in[1,4]\}$

$f+g=\{(x,f(x)+g(x))|f(x)+g(x)=x^2+2x-8;x\in[1,4]\}$

b) $f-g=\{(x,f(x)-g(x))|f(x)-g(x)=x^2-9-2x-1;x\in[1,4]\}$

$f-g=\{(x,f(x)+g(x))|f(x)+g(x)=x^2-2x-10;x\in[1,4]\}$

c) $f\cdot g=\{(x,f(x)\cdot g(x))|f(x)\cdot g(x)=(x^2-9)\cdot(2x+1);x\in[1,4]\}$

$f\cdot g=\{(x,f(x)\cdot g(x))|f(x)\cdot g(x)=2x^3+x^2-18x-9;x\in[1,4]\}$

d) $\frac{f}{g}=\left\{\left(x,f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)\middle|f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=(x^2-9)\cdot\frac{1}{(2x+1)};x\in[1,4]\right\}$

$\frac{f}{g}=\left\{\left(x,f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)\middle|\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x^2-9)}{(2x+1)};x\in[1,4]\right\}$

5. El dominio de *f* es $(-\infty,+\infty)$, el dominio de *g* es $(-\infty,+\infty)$.

a) $f+g=x^3+2x^2+1$ con dominio $(-\infty,+\infty)$

b) $f-g=x^3-2x^2-1$ con dominio $(-\infty,+\infty)$

c) $f\cdot g=\frac{x^3}{2x^2+1}$ con dominio $(-\infty,+\infty)$

d) $\frac{f}{g}=\frac{2x^2+1}{x^3}$ con dominio $(-\infty,+\infty)\cup(0,+\infty)$

9. $\theta=f\circ g=\left(\sqrt{x}\right)^2+4=x+4.$

El dominio de *f* es el intervalo $(-\infty,+\infty)$.

El dominio de *g* es el intervalo $[0,+\infty)$.

Entonces, el dominio de $\phi=f\circ g$ es el intervalo $[0,+\infty)$.

UNIDAD 2

EJERCICIO 6

(I). 1. El límite es una especie de cota que a veces puede no ser alcanzable y otras no sólo es alcanzable sino superable. A través de éste se pueden visualizar los cambios en el rendimiento mediante pequeños números de unidades.

3. Es el valor que alguna variable puede llegar a tomar sin necesariamente llegar a tomar dicho valor ya que siempre existirá una infinitesimal distancia entre la variable y su límite.

5. El límite de una función en un punto dado es el valor al que se acercan las imágenes cuando las variables se acercan al valor límite a. Es decir, el valor al que tienden las imágenes cuando las variables tienden a a.

(II). No se presenta la solución por tratarse de ejercicios gráficos.

EJERCICIO 7

(I). 1. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$

3. $\lim\limits_{x\to -2} (5x-2) = -12$

5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} x = \dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4) = 0$

9. $\lim\limits_{x\to -2} 3x^2 = 12$

11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{2x+3} = \dfrac{4}{9}$

(II). 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2-2x}{2x} = -1$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{x} = 5$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} = \dfrac{3}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+4x-21}{x-3} = 10$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-8x+12}{x-2} = -4$

11. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-125}{x^2-25} = \dfrac{15}{2}$

(III). 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{1}{4}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \dfrac{1}{4}$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4} = 8$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = 4$

(IV). 1. $f(x) = mx^2 = 2mx$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{2}{x^3}$

7. $f(x) = 2x^2+7x-1 = 4x+7$

9. $f(x) = \sqrt{ax+b} = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax}} = -\dfrac{a}{2(ax)^{\frac{3}{2}}}$

13. $f(x) = \sqrt{x+9} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+9}}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8x+1}} = -\dfrac{4}{(8x+1)^{\frac{3}{2}}}$

(V). 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2t^3 - t^2 + 4}{2t - t^2 - 7t^3} = -\dfrac{2}{7}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+2}{3x+5} = 2$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{4+x-5x^2} = -\dfrac{2}{5}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2+4x+2}{8x^2-5x+3} = 1$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^3+3} = 2$

Ejercicio 8

(I). 1. La gráfica de una función continua es aquella que presenta ausencias de vacío o saltos, es decir, se traza sin despegar el lápiz del papel.

3. Se le llama función discontinua a aquella que no cumpla con algunas de las tres condiciones que cumple una función continua.

5. $f(x)$ es continua por la derecha en a.

$f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a,b).

$f(x)$ es continua por la izquierda en b.

7. De las propiedades de los límites se deducen las propiedades de las funciones continuas, es decir, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas cuando $x = a$, las funciones siguientes son también continuas en a.

   1. $f(x) \pm g(x)$.
   2. $Cf(x)$, donde C es una constante arbitraria.
   3. $f(x) \cdot g(x)$.
   4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(a) \neq 0$.
   5. $f(g(x))$, al suponer que $f(x)$ es continua en $g(a)$.

(II). 1. La función polinomial está definida para todos los números reales y para todo valor de a el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, por lo tanto, se concluye que $f(x)$ es continua.

3. La función racional está definida cuando $x \neq 1$. El $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, por lo tanto, sólo es necesario analizar la continuidad en $x = 1$.

Al analizar los límites a la izquierda y derecha de 1 se tiene:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto, $f(x)$ es continua excepto en $x = 1$.

5. La función racional está definida para $x \neq \pm 5$ y para todo valor de $a \neq \pm 5$ el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. En el punto $x \neq \pm 5$ el límite de la función es del tipo $\frac{0}{0}$, de tal forma que:

$$\lim_{x\to 5^{\pm}} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x\to 5^{\pm}} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5^{\pm}} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{x\to -5^{+}} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x\to 5^{+}} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5^{+}} \frac{1}{x+5} = \infty$$

$$\lim_{x\to -5^{-}} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x\to 5^{-}} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5^{-}} \frac{1}{x+5} = -\infty$$

Entonces,

$$\lim_{x\to -5^{+}} \frac{x-5}{x^2-25} \neq \lim_{x\to -5^{-}} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)}$$

$\therefore$ La función presenta dos discontinuidades. Cuando $x = 5$, la discontinuidad es del tipo evitable, y cuando $x = -5$ es no evitable.

7. La función racional está definida para $x \neq 3$ y -4, además para todo valor de $a \neq 3$ y $a \neq -4$ el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Para los puntos $x = 3$ y $x = -4$ se tiene:

$$\lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{x+4}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{x+4}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{1}{x-3} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -4^{\pm}} \frac{x+4}{x^2+x-12} = \lim_{x\to -4^{\pm}} \frac{x+4}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to -4^{\pm}} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{7}$$

$\therefore$ La función presenta una discontinuidad en $x = 3$ y $x = -4$, siendo no evitable y evitable respectivamente.

9. La función racional está definida para $x \neq 1$ y $x \neq 4$, y para todo valor de $a \neq 1$ y $a \neq 4$ el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Para los puntos $x = 1$ y $x = 4$, se tiene:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x-1}{x^2+5x+4} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x-1}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{x-1}{x^2+5x+4} = \lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{x-1}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{1}{x-4} = \pm\infty$$

$\therefore$ La función presenta discontinuidades en $x = 1$ y $x = 4$ la discontinuidad en $x = 1$ es del tipo evitable y la discontinuidad en $x = 4$ es del tipo no evitable.

11. Las funciones polinomiales $3 - 2x$ y x, están definidas en los intervalos $(-\infty,1)$ y $[1,\infty)$ es decir, $f(x)$ es continua para todos los números reales. Se analiza su comportamiento cuando $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^{-}} (3-2x) = \lim_{x\to 1^{+}} x$$

$\therefore$ La función $f(x)$ es continua en los números reales.

13. La función racional está definida para $x \neq -3$ y para todo valor de $a \neq -3$ el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Para el punto $x = -3$, se tiene:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{|x+3|}{x+3} = -1$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{|x+3|}{x+3} = 1$$

$\therefore$ La función $f(x)$ es continua en los números reales excepto cuando $x = -3$.

15. Como se sabe, la función parte entera tiene discontinuidad de "salto" en cada entero, es decir,

$$\lim_{x \to 1^-} [x-1] = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} [x-1] = 0$$

La función $f(x) = [x - 1]$ es continua por la derecha pero discontinua por la izquierda en cada entero dado que:

$$\lim_{x \to a^-} [x-1] = a-1 \qquad \text{(continua por la derecha)}$$

$$\lim_{x \to a^+} [x-1] = a \qquad \text{(discontinua por la izquierda)}$$

La función $f(x) = [x - 1]$ es continua en cualquier número que no sea entero, ya que es constante en cada intervalo $(a, a + 1)$ donde a es un entero.

17. La función racional está definida para $x \neq 2$, y para todo valor de $a \neq 2$ el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Para el punto $x = 2$ se tiene:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{5}{x^3 - 8} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{5}{x^3 - 8} = +\infty$$

$\therefore$ La función $f(x)$ es continua en los números reales excepto cuando $x = 2$.

19. La función racional está definida para $x \neq \pm 2$ y para todo valor de $a \neq \pm 2$ el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Cuando $x = 2$ se tiene:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \to 2^-} \left(3 + \sqrt{x^2 + 5}\right) = 6$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \to 2^+} \left(3 + \sqrt{x^2 + 5}\right) = 6$$

$\therefore$ La función presenta discontinuidades en $x = \pm 2$, ambas del tipo evitable.

UNIDAD 3

EJERCICIO 9

(I). 1. El cociente de diferencias de y con respecto a x en un intervalo Δx mediante la siguiente regla:

$$\frac{\text{Cambio en y}}{\text{Cambio en } x} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \text{Cociente de diferencias}$$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta y) - f(x)}{\Delta x}$

5. Debido a que el cociente de diferencias de y con respecto a x no es el mismo en todos los puntos.

7. Es la recta que corta a la curva en dos o más puntos.

9. Es el límite del cociente de diferencias de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

(II). 1. El cociente de diferencias de $f(x)$ al pasar de $x = 1$ a $x = 2$ es:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{21 - 16}{2 - 1} = 5$$

$\therefore$ Para $x = 1$, $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 5$ y $x = 2$, $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 5$.

3. El cociente de diferencias de $f(x)$ al pasar de $x = 0$ a $x = 3$ es:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{4} - (0)}{3 - 0} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ Para $x = 0$, $f'(x) = 1$ y $x = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{16}$.

5. El cociente de diferencias de $h(x)$ al pasar de $x = -1$ a $x = 1$ es:

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{1 + 1} = -1$$

$\therefore$ Para $x = -1$, $h'(-1) = 1$ y $x = 1$, $h'(1) = 1$.

7. El cociente de diferencias de $f(t)$ al pasar de $t = 3$ a $t = 4$ es:

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{\sqrt{7} - 0}{4 - 3} = \sqrt{7}$$

$\therefore$ Para $t = 3$, $f'(3) = \infty$ y $t = 4$, $f'(4) = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$.

9. El cociente de diferencias de $h(x)$ al pasar de $x = 1$ a $x = 3$ es:

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \frac{-10 - 6}{3 + 1} = -4$$

$\therefore$ Para $x = -1$, $h'(-1) = -8$ y $x = 3$, $h'(3) = 0$.

(III). 1. *b*) Cuando $x = 0$, $x = 0$ y para $x = 15$ $y = 0$; por lo tanto la distancia total recorrida es de 15 unidades.

c) $x = 7.5$ unidades.

d) La razón de cambio instantáneo para cuando la pelota alcanza la altura máxima es en $x = 7.5$, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = f'(7.5) = 1 - \frac{64}{(21.9)^2}(7.5) = -8.13 \times 10^{-4}$$

3. *a*) $s'(2) = 500 - 32(2) = 436$.

b) Los puntos de intersección son (0,0) y (31.25,0); $t = 15.625$.

EJERCICIO 10

(I). 1. $\frac{dy}{dx} = 8$

3. $\frac{dy}{dx} = 4x$

5. $\frac{dy}{dx} = 3ax^2$

7. $\frac{dy}{dx} = 6x + 5$

9. $\frac{du}{dv} = 2mv$

11. $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{(x+a)^2}$

13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

15. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{(1+x)^2}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{(a+bx^2)^2}$

19. $\frac{dy}{dx} = 2n(m+nx)$

21. $\frac{dy}{dx} = -17 + 6x$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{bx^2 - a}{x^2}$

25. $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$

27. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

29. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$

31. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^4}$

33. $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2(5x)^{\frac{3}{2}}}$

35. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{(3+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

37. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 2a^2}{x^3\sqrt{a^2+x^2}}$

39. $\frac{dy}{dx} = 0$

EJERCICIO 11

(I). 1. $y' = 9x^2 + x - 7$

3. $y' = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 6x^{-\frac{1}{5}} - 5x^{-\frac{3}{8}}$

5. $y' = 10x(x^2 + a^2)^4$

7. $y' = \frac{45x^3 + 23x}{\sqrt{3x^2 + 2}}$

9. $y' = -ax^{-2} + 2bx^{-3}$

11. $y' = \frac{2x + a^2}{a(2x)^{\frac{3}{2}}}$

13. $y' = -x(4 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$

15. $y' = \frac{5bx^2 + 4ax}{2(bx + a)^{\frac{1}{2}}}$

17. $y' = \frac{-a^2}{x^2(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$

19. $y' = -\frac{a}{(1 - ax)^{\frac{1}{2}}(1 + ax)^{\frac{3}{2}}}$

21. $y' = \frac{2 - 5x}{3(1 + 5x)^{\frac{2}{3}}(1 + 2x)^{\frac{3}{2}}}$

23. $y' = \frac{40x - 20x^2}{(5 - 2x)^{\frac{1}{2}}}$

25. $y' = \frac{2a^2x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$

27. $y' = \frac{1}{(x + 1)^2}$

29. $u' = -\frac{4va^2}{(v^2 - a^2)^2}$

31. $y' = (3x + 2)(12x^2 + 4x - 6)$

33. $y' = \frac{x(x^3 + 9x - 2)}{(x^2 + 3)^2}$

35. $y' = \frac{-3 + 9x}{(6x - 5)^{\frac{1}{2}}(4 - 3x)^2}$

37. $y' = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}} - x^{\frac{5}{4}}$

39. $y' = \frac{1 - 3x}{2\sqrt{x}}$

(II). 1. $y' = \frac{2}{3}(4)^{-\frac{2}{3}} + (4)^{-\frac{1}{2}} = 0.7645$

3. $y' = -\frac{5(-3)}{\sqrt{10 - (-3)^2}(-5 + (-3)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{15}{8}$

5. $y' = -\frac{1}{(5 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{6\sqrt{6}}$

7. $u = \frac{-6}{2^3} = -\frac{3}{4}$

9. $y' = -\frac{1}{3}(1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{1}{3}$

11. $s' = -\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{5}{3}$

13. $y' = \frac{3}{2}(4)^{\frac{1}{2}} = 3$

15. $y' = \frac{(-1)^2 + 8(-1) + 15}{(-1 + 4)^2} = \frac{8}{9}$

EJERCICIO 12

(I). 1. $m = 2$

$\theta = 63° \, 26' \, 5.82''$

3. $m = 19$

$\theta = 86° \, 59' \, 13.96''$

5. $m = \frac{5}{4}$

$\theta = 51° \, 20' \, 24.69''$

7. $m = \frac{5}{49}$

$\theta = 5° \, 49' \, 34.83''$

9. $m = -6$

   $\theta = 99° \, 27' \, 44.36''$

11. $m = 2$

   $\theta = 99° \, 27' \, 44.36''$

13. $m = \dfrac{13}{3}$

   $\theta = 77° \, 0' \, 38''$

15. $m = -\dfrac{1}{9\sqrt{10}}$

   $\theta = 177° \, 59' \, 57''$

(II).

1. $9x + y - 16 = 0$
3. $-10x + y + 5 = 0$
5. $y - 1 = 0$
7. $-\dfrac{1}{8}x + y + \dfrac{3}{4} = 0$
9. $x + y - 1 = 0$
11. $-\dfrac{9}{5}x + y + \dfrac{2}{5} = 0$
13. $4x + y + 8 = 0$
15. $y - \sqrt{8} = 0$

(III).

1. Para $x = -1$

   $y = (-1)^3 - 1 = -2$

   $-4x + y - 2 = 0$

   Para $x = 1$

   $y = (1)^3 + 1 = 2$

   $-4x + y + 2 = 0$

3. Para $x = -\dfrac{2}{3}$

   $$y = \sqrt{5 - 5\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$$

   $$y - \frac{5}{3} = 2x + \frac{4}{3}$$

5. Para $x = -2$

   $y = 3 - (2)^2 = -1$

   $-4x + y - 7 = 0$

7. Para $x = -3$

   $y = (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0$

   $4x + y + 12 = 0$

9 Para $x = 1$

   $y = (1)^3 + (1) = 2$

   Para $x = -1$

   $-4x + y + 2 = 0$

   $y = (-1)^3 + (-1) = -2$

   $-4x + y - 2 = 0$

(V).

1. Recta tangente:

   $$-4x + y + 3 = 0$$

   Recta normal:

   $$\frac{1}{4}x + y - \frac{11}{2} = 0$$

3. Recta tangente:

   $$-12x + y + 16 = 0$$

   Recta normal:

   $$\frac{1}{12}x + y - \frac{49}{6} = 0$$

5. Recta tangente:

   $$-\frac{7}{4}x + y + \frac{1}{4} = 0$$

   Recta normal:

   $$\frac{4}{7}x + y - \frac{29}{14} = 0$$

7. Recta tangente:

   $$y - 4 = 0$$

   Recta normal:

   $$x = 2$$

9. Recta tangente:

$$8x + y + 4 = 0$$

Recta normal:

$$-\frac{1}{8}x + y - \frac{33}{8} = 0$$

(VI). 1. Recta tangente:

$$-\frac{1}{2}x + y + 1 = 0$$

Recta normal:

$$2x + y - 9 = 0$$

3. Recta tangente:

$$-12x + y + 20 = 0$$

Recta normal:

$$-\frac{1}{12}x + y - \frac{25}{6} = 0$$

5. Recta tangente:

$$-2x + y = 0$$

Recta normal:

$$\frac{1}{2}x + y = 0$$

EJERCICIO 13

(I). 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{8x(x^2-1)(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}{3(1+x^2)^3(3+2x^2+3x^4)^{\frac{2}{3}}}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x-1(x+1)^3}}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

7. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$

9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{8x(x^2-1)^2}{\sqrt{-32x^2(1+x^4)^3}}$

11. $\frac{dy}{dx} = -\frac{29(1+x)}{2\sqrt{x}\left(-3+5\sqrt{x}+3x\right)^2}$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{(2b-x)\left(-b\sqrt{b-x}+x\right)}{\sqrt{b-x}\,4\sqrt{(b-x)^{\frac{3}{2}}x^3}}$

15. $\frac{dy}{dx} = -\frac{128x(-16+x^4)}{(16+24x^2+x^4)^2}$

17. $\frac{dy}{dx} = -\frac{16(1+x)^3}{(-2+(1+x)^4)^2}$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{14\sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{(1+x)}}$

(II). 1. $\frac{dy}{dx} = y' \cdot u' = 12(2x^3+3x^2-4)^{11}(6x^2+6x)$

3. $\frac{dy}{dx} = y' \cdot u' = 15(3x+2)^4$

5. $\frac{dy}{dx} = y' \cdot u' = -\frac{1}{\sqrt{(3x+1)^3(2x+1)}}$

7. $\frac{dy}{dx} = y' \cdot u' = 4\frac{\left(\sqrt{x}-8\right)^7}{\sqrt{x}}$

9. $\frac{dy}{dx} = y' \cdot u' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^3}}$

11. $\dfrac{dy}{dx}=y'\cdot u'=\dfrac{1}{\sqrt{2(1-x^2)^3}}$

(III). No se presenta la solución por tratarse de ejercicios de comprobación.

(IV). 1. $\dfrac{d}{dx}|x|=\dfrac{x}{|x|}\dfrac{dx}{dx}=\dfrac{x}{|x|}$

$$\frac{x}{|x|}\begin{cases}1, \text{si} & x>0\\ -1, \text{si} & x<0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=1;\ \text{para } x>0$$

$$\frac{dy}{dx}=-1;\ \text{para } x<0$$

3. $\dfrac{d}{dx}\left|\sqrt{x}\right|=\dfrac{\sqrt{x}}{\left|\sqrt{x}\right|}\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x}}{\left|\sqrt{x}\right|}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{\sqrt{x}}{\left|\sqrt{x}\right|}\begin{cases}1, \text{si} & \sqrt{x}>0\\ -1, \text{si} & \sqrt{x}<0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\ \text{para } \sqrt{x}>0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}};\ \text{para } \sqrt{x}<0$$

5. $\dfrac{d}{dx}|x^2-x|=\dfrac{x^2-x}{|x^2-x|}\dfrac{d}{dx}(x^2-x)=\dfrac{x^2-x}{|x^2-x|}(2x-1)$

$$\frac{x^2-x}{|x^2-x|}\begin{cases}1, \text{si} & x^2-x>0\\ -1, \text{si} & x^2-x<0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=(2x-1);\ \text{para } x^2-x>0$$

$$\frac{dy}{dx}=-(2x-1);\ \text{para } x^2-x<0$$

7. $\dfrac{d}{dx}|x-3|=\dfrac{x-3}{|x-3|}\dfrac{d}{dx}(x-3)=\dfrac{x-3}{|x-3|}$

$$\frac{x-3}{|x-3|}\begin{cases}1, \text{si} & x-3>0\\ -1, \text{si} & x-3<0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=1;\ \text{para } x-3>0$$

$$\frac{dy}{dx}=-1;\ \text{para } x-3<0$$

9. $$\frac{d}{dx}\left|\frac{9-2x}{3-x}\right|=\frac{\frac{9-2x}{3-x}}{\left|\frac{9-2x}{3-x}\right|}\frac{d}{dx}\left(\frac{9-2x}{3-x}\right)=\frac{\frac{9-2x}{3-x}}{\left|\frac{9-2x}{3-x}\right|}\frac{3}{(3-x)^2}$$

$$\frac{\frac{9-2x}{3-x}}{\left|\frac{9-2x}{3-x}\right|}\begin{cases}1, \text{si} & \frac{9-2x}{3-x}>0\\ -1, \text{si} & \frac{9-2x}{3-x}<0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{(3-x)^2};\ \text{para } \frac{9-2x}{3-x}>0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{(3-x)};\ \text{para} \frac{9-2x}{3-x}<0$$

11. $$\frac{d}{dx}\left|\frac{x}{2}\right|=\frac{\frac{x}{2}}{\left|\frac{x}{2}\right|}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\frac{x}{2}}{\left|\frac{x}{2}\right|}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{x}{2}}{\left|\frac{x}{2}\right|}\begin{cases}1, \text{si} & \frac{x}{2}>0\\ -1, \text{si} & \frac{x}{2}<0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2};\ \text{para } \frac{x}{2}>0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2};\ \text{para} \frac{x}{2}<0$$

13. $$\frac{d}{dx}(|x|-x)=\frac{d}{dx}|x|-1=\frac{x}{|x|}-1$$

$$\frac{x}{|x|}\begin{cases}1, \text{si} & x>0\\ -1, \text{si} & x<0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=0;\ \text{para } x>0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2;\ \text{para } x<0$$

15. $$\frac{d}{dx}\left|\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right|=\frac{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}{\left|\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right|}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}{\left|\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right|}\left(-\frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)^3}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}{\left|\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right|}\begin{cases} 1, \text{ si} & \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} > 0 \\ -1, \text{ si} & \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} < 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)^3}}; \text{ para } \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} > 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)^3}}; \text{ para } \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} < 0$$

Ejercicio 14

(I). 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{5y^2+9y^2+9}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2p}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{by}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{4xy-3x^2-3y^2}{6xy-2x^2-3y^2}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+3x^2y}{x^3+y^3}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^5x}+\sqrt{x^3y^3}}{\sqrt{y^3x^3}+\sqrt{x^5y}}$

13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{1+y}(2+3y)}{3x\sqrt{1+y}+\sqrt{2+3y}\left(2+3y-2\sqrt{1+y}\right)}$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}-y}{x+4\sqrt{y}}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-4y}{4x-3y^2}$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-3x^2-3y^2}{6xy+2y-2x}$

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-2xy-2x}{x^2-2xy+2y}$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy-3x^2}{3y^2-x^2}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(a+y^2)^2}{2ay}$

(II). 1. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{0}$$

3. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-\sqrt{\frac{1}{4}}}{4+\sqrt{\frac{4}{1}}} = \frac{1}{4}$$

5. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

7. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1(6+1)}{3(3+2)} = -\frac{7}{18}$$

9. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+2}{2+3} = -\frac{1}{2}$$

11. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-3(2)^2(5)^2}{2(2)^3 5+3(5)^2} = -\frac{298}{155}$$

13. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-6+3}{1+9-18} = \frac{1}{8}$$

15. En el punto dado se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12-5}{10+3} = \frac{7}{13}$$

(III). 1. *a*) Recta tangente:

$$x + 10y - 32 = 0$$

Recta normal:

$$-10x + y + 17 = 0$$

b) Recta tangente:

$$\frac{1}{2}x + y = 0$$

Recta normal:

$$-2x + y - 5 = 0$$

c) Recta tangente:

$$-\frac{8}{5}x + y - \frac{9}{5} = 0$$

Recta normal:

$$-\frac{5}{4}x + y - 5 = 0$$

d) Recta tangente:

$$-\frac{7}{2}x + y + 7 = 0$$

Recta normal:

$$\frac{2}{7}x + y - \frac{25}{7} = 0$$

e) Recta tangente:

$$-6x + y + 11 = 0$$

Recta normal:

$$-\frac{1}{6}x + y - \frac{14}{3} = 0$$

f) Recta tangente:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x + y - \frac{9\sqrt{5}}{5} = 0$$

Recta normal:

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}x + y - 2\sqrt{5} = 0$$

3. *a)* $\theta = 6^\circ\, 20'\, 24''$

   b) $\theta = 102^\circ\, 16'\, 9''$

   c) $\theta = 112^\circ\, 37'\, 11''$

   d) $\theta = 4^\circ\, 23'\, 55''$

   e) $\theta = 105^\circ\, 47'\, 35''$

5. $t = 4$, $s = 256$ m.

EJERCICIO 15

(I). 1. El valor del número e está representado por el límite de su definición, es decir,

$$e = \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828182846$$

3. Los logaritmos naturales y comunes se relacionan de la siguiente forma:

El logaritmo natural de un número cualquiera se determina al dividir su logaritmo común por el logaritmo e, es decir:

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$$

(II).

		Fórmula	Sustitución
a)	$N = 5$	$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$	$\ln 5 = 2.303 \log 5$ $= 2.303\ (0.6989)$ $\therefore\ \ln 5 = 1.609$
c)	$N = 9$	$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$	$\ln 9 = 2.303 \log 9$ $= 2.303\ (0.9542)$ $\therefore\ \ln 9 = 2.1976$
e)	$N = 18$	$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$	$\ln 18 = 2.303 \log 18$ $= 2.303\ (1.2552)$ $\therefore\ \ln 18 = 2.8908$
g)	$N = 34$	$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$	$\ln 34 = 2.303 \log 34$ $= 2.303\ (1.5314)$ $\therefore\ \ln 5 = 3.5269$
i)	$N = 123$	$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$	$\ln 123 = 2.303 \log 123$ $= 2.303\ (2.0899)$ $\therefore\ \ln 123 = 4.8130$
k)	$N = 694$	$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$	$\ln 694 = 2.303 \log 694$ $= 2.303\ (2.8413)$ $\therefore\ \ln 694 = 6.5436$

(III).

	Datos	Fórmula	Sustitución
b)	$N = 92$	$\log N = \ln N \log e$	$\ln 92 = 0.4343 \log 92$ $= 0.4343\,(4.5217)$ $\therefore\ \ln 92 = 1.9638$
d)	$N = 469$	$\log N = \ln N \log e$	$\ln 469 = 0.4343 \log 469$ $= 0.4343\,(6.1506)$ $\therefore\ \ln 469 = 2.6712$
f)	$N = 1024$	$\log N = \ln N \log e$	$\ln 92 = 0.4343 \log 92$ $= 0.4343\,(4.5217)$ $\therefore\ \ln 92 = 1.9638$
h)	$N = 13975$	$\log N = \ln N \log e$	$\ln 13975 = 0.4343 \log 13975$ $= 0.4343\,(9.5450)$ $\therefore\ \ln 13975 = 4.1454$

(IV) y (V). No se presenta la solución por tratarse de ejercicios de comprobación.

(VI). 1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2} = \cos\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\tan\sqrt{a^2-x^2} = \sec^2\sqrt{a^2-x^2}\,\dfrac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\sec^2\sqrt{a^2-x^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = a\dfrac{d}{dx}\sec\dfrac{x}{a} = \sec\dfrac{x}{a}\tan\dfrac{x}{a}$

(VII) y (VIII). No se presenta la solución por tratarse de ejercicios de comprobación.

(IX). 1. $\dfrac{dy}{dx} = -e^{2x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \left(e^x - \dfrac{6\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\right)(1+y^2)$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos x - 5}{3 + 4\operatorname{sen} y}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+y^2)2x\operatorname{sen} y + 1}{1 - x^2(1+y^2)\cos y}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3y^2 + 2y\operatorname{sen} 2xy}{6xy - 2x\operatorname{sen} 2xy}$

11. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}(x+y)+2x}{2y-\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}(x+y)}$

13. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-\dfrac{1}{x}-e^x\operatorname{sen} y}{e^x\cos y+\dfrac{1}{y}-x}$

15. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6yx-\sqrt{x^4-9y^2}(\cos y+ye^x)}{\sqrt{x^4-9y^2}(-x\operatorname{sen} y+e^x)-x^2}$

17. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3\sec^2 3x}{2\cos 2y}$

19. $\dfrac{dy}{dx}=\operatorname{sen}\dfrac{(x+y)}{-2\operatorname{sen} 2y-\operatorname{sen}(x+y)}$

EJERCICIO 16

(I). 1. $y''=\dfrac{-4\dfrac{d}{dx}(2-x)^2}{(2-x)^4}=\dfrac{-8(2-x)(-1)}{(2-x)^4}=\dfrac{8}{(2-x)^3}$

3. $y''=\dfrac{d}{dx}=\dfrac{40(2+x)}{(2+x)^4}=\dfrac{40}{(2+x)^3}$

5. $y''=\dfrac{d}{dx}a(ax)^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}a^2(ax)^{-\frac{3}{2}}$

7. $y''=-\dfrac{-4x^2(3+x^2)y^3+(x^2+y^2)y^2\left[4y(x^2+y^2)\right]}{4y^2(x^2+y^2)^3}$

9. $y''=-\dfrac{4x\left(2\left(-\dfrac{2y+x}{2x}\right)+1\right)+4(2y+x)}{4x}=1$

11. $y''=-\dfrac{2}{3}\dfrac{d}{dx}x(4-x^2)^{-\frac{2}{3}}=-\dfrac{2(12+x^2)}{9(4-x^2)^{\frac{5}{3}}}$

13. $y''=\dfrac{d}{dx}\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}=-\dfrac{\cos^2 2x}{(\operatorname{sen} 2x)^{\frac{3}{2}}}-2\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$

15. $y''=-2\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}x=-\cos\dfrac{1}{2}x$

17. $y''=2\log e\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2\log e}{x^2}$

19. $y''=6\dfrac{d}{dx}xe^{3x^2}=6e^{3x^2}(1+6x^2)$

(III). 1. $y''' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{b^2}{4}(a-bx)^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3b^3}{8}(a-bx)^{-\frac{5}{2}}$

3. $y''' = \frac{d}{dx}\left(6x - \frac{6}{x^3}\right) = 6 + \frac{18}{x^4}$

5. $y''' = \frac{(2x-y)^2(32xy-8y^2)-24xy(4x-4y)}{(2x-y)^4} = \frac{8y(2x-y)^2(4x-y)-24xy(4x-4y)}{(2x-y)^4}$

7. $y''' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2b^2}{9}(a-bx)^{-\frac{5}{3}}\right) = -\frac{10b^3}{27}(a-bx)^{-\frac{8}{3}}$

9. $y''' = \frac{d}{dx}2 = 0$

11. $y''' = -e^{-x}\ln x + \frac{3e^{-x}}{x} + \frac{3e^{-x}}{x^2} + \frac{2e^{-x}}{x^3}$

13. $y''' = \frac{4x(3+x^2)}{(-1+x^2)^3}$

15. $y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{(1-e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{e^x(1-e^{2x})+3e^{3x}}{(1-e^{2x})^{\frac{5}{2}}} = \frac{e^x-2e^{3x}}{(1-e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$

17. $y''' = \frac{d}{dx}\frac{\log e}{x^2} = \frac{2\log e}{x^3}$

19. $y''' = \frac{d}{dx}(2a) = 0$

(IV). 1. $y^{(4)} = \frac{d}{dx}(120x) = 120$

3. $y^{(4)} = \frac{3(5+21x+35x^2+35x^3)}{16x^{\frac{7}{2}}(1+x)^4}$

5. $y^{(4)} = e^{2x}(120\,\text{sen}\,3x - 119\cos 3x)$

Unidad 4

Ejercicio 17

(II). 1. $\theta = 146^\circ\, 27'\, 35''$

3. $\theta = 81^\circ\, 73'\, 37''$

5. $\theta = 57^\circ\, 26'\, 39''$

EJERCICIO 18. No se presenta la solución por tratarse de ejercicios gráficos.

EJERCICIO 19

(I). 1. Cuando $x = -1$, existe un máximo en 5.

3. Cuando $x = 4$, existe un mínimo en -16.

5. La función no tiene máximos ni mínimos relativos.

7. Cuando $x = 0$, existe un máximo en 0 y cuando $x = \frac{4}{3}$, existe un mínimo en $-\frac{256}{81}$.

9. Cuando $x = 0$, existe un máximo en 15.

   En $x = 4$, existe un mínimo en -17.

11. Cuando $x = 0$, existe un máximo en 1.

    Cuando $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, existe un mínimo en $\frac{3}{4}$.

    Cuando $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, existe un mínimo en $\frac{3}{4}$.

13. Cuando $x = a$, existe un mínimo en $2a^2$.

    Cuando $x = a$, un mínimo en $2a^2$.

15. Cuando $x = 1$, la función toma el valor de 0.

    Cuando $x = -2$, existe un máximo en 0.

    Cuando $x = -\frac{4}{5}$, existe un máximo en 8.398.

17. No existen máximos ni mínimos.

19. En $x = 0$ existe un máximo cuyo valor es 2.

21. En $x = 1$ existe un mínimo cuyo valor es 2.

    En $x = -1$ existe un máximo cuyo valor es -2.

EJERCICIO 20

(I). 1. El punto de inflexión es (3,19).

   La curva es cóncava hacia abajo a la izquierda del punto de inflexión y es cóncava hacia arriba a la derecha de dicho punto.

3. El punto de inflexión es, (2,0).

   La curva es cóncava hacia abajo a la izquierda del punto de inflexión y es cóncava hacia arriba a la derecha de dicho punto.

5. La curva no tiene puntos de inflexión.

   La curva es cóncava hacia arriba.

7. La curva no tiene puntos de inflexión.

   La curva es cóncava hacia arriba.

9. La curva no tiene puntos de inflexión.

   La curva es cóncava hacia abajo.

11. El punto de inflexión es $(-1,0)$.

   La curva es cóncava hacia arriba a la izquierda del punto y cóncava hacia abajo a la derecha de dicho punto.

13. La función no tiene puntos de inflexión.

   La curva es cóncava hacia arriba para $x < 0$, la curva es cóncava hacia arriba para $x > 0$.

15. El punto de inflexión es $(2,-14)$.

   La curva es cóncava hacia arriba a la izquierda del punto P, y cóncava hacia debajo de dicho punto.

   La curva es cóncava hacia abajo a la izquierda del punto Q y cóncava hacia arriba a la derecha de dicho punto.

17. Su punto de inflexión no existe.

   La curva es cóncava hacia arriba en todos sus puntos ya que no tiene punto de inflexión.

   En la gráfica se observa que existe un punto de inflexión, sin embargo, en ese punto la función es discontinua.

19. El punto de inflexión es $(0,0)$.

   La función es cóncava hacia abajo a la izquierda del punto P y cóncava a la derecha de dicho punto.

21. El punto de inflexión es $(2,0)$.

23. Su punto de inflexión no existe.

25. El punto de inflexión es $(0,0)$.

EJERCICIO 21. No se presenta la solución por tratarse de ejercicios de comprobación.

EJERCICIO 22

(I). 1. La sombra se alarga a una razón de 78.46 m/s.

3. *a)* El extremo superior se mueve a una velocidad de 0.8 m/s.

   b) La pendiente disminuye a una velocidad de 0.13 m/s.

5. La velocidad del extremo del cable es: $v_z = 1.18$ m/s.

7. El área de la superficie disminuye con una rapidez de 7.85 cm^2/min.

9. El área aumenta con una rapidez de 7.85 cm^2/min.

11. La velocidad es de 31.225 m/s.

13. La velocidad es positiva en los intervalos $(0,3)$ y $(8,+\infty)$.

   La velocidad es negativa en el intervalo $(3,8)$.

Siendo este último el intervalo en el que el automóvil se mueve en sentido contrario.

15. *a)* En $t = 2$s la partícula tiene una velocidad de -4 m/s.

    b) En $t = 2$s la partícula tiene una velocidad de 4 m/s.

    c) En $t = 3$s la partícula tiene una velocidad de 0 m/s.

19. Como la moneda va hacia abajo, la velocidad es negativa $v = -65.69$ m/s.

21. *a)* La velocidad después de 3 s es 74 m/s.

    b) La velocidad final es de 88.17 m/s.

23. La torre tiene una altura de 226.80 m.

25. *a)* Los móviles tendrán la misma posición a los 5 s.

    b) Los móviles tendrán la misma velocidad a los 2.5 s.

    c) La velocidad de cada móvil será 0.

    d) Los móviles se moverán en la misma dirección cuando $t_1 = 3$ y $t_2 = 2$.

EJERCICIO 23. No se presenta la solución por tratarse de problemas de aplicación.

EJERCICIO 24. No se presenta la solución por tratarse de ejercicios de comprobación.

EJERCICIO 25

(I). 1. $dy = (6x-8)dx = (6-8)(0,4) = -\dfrac{4}{5}$

3. $dy = 2xdx = 2(-1)(0.25) = -0.5$

5. $dy = -\dfrac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}dx = -\dfrac{1}{3(2)^{\frac{4}{3}}}(0.1) = -0.013$

7. $dy = \sec^2 x\, dx = \sec^2 45(0.03528) = 0.127$

9. $dy = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \dfrac{2}{\sqrt{1-36}}(0.045)$

(II). 1. $A = \pi r^2$

$r = 12$

$dA = 2\pi r dr$

$dA = 2\pi(12)(0.03) = 2.2619$

$A = \pi r^2 = \pi(12)^2 + dA = 452.3893 + 2.2619 = 454.6512$

$A_1 = \pi r^2 = \pi(12.03)^2 = 454.6541$

3. $V=2\pi rh$

$dV=2\pi hdr=2\pi(35)(0.3)=65.97$

$V=2\pi rh+dV=109.955+65.073=175.927$

$V_1=2\pi(1.3)(35)=185.825$

(III). 1. $\sqrt[3]{65}=y+dy=4+\dfrac{1}{48}\approx 4.02$

3. $\sqrt[4]{83}=y+dy=3+\dfrac{1}{54}\approx 3.01$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{50}}=y+dy=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{686}\approx 0.141$

7. $\sqrt[4]{\dfrac{17}{81}}\approx\dfrac{2.03}{3}=0.676$

9. $\cos 44\approx 0.7194$ rad

11. $\cot 29=\dfrac{3}{\sqrt{3}}+0.0698\approx 1.8018$ rad

13. $\ln 5.83=y+dy=1.75785+0.0051\approx 1.7629$

15. $e^{2.2}=y+dy=7.389+1.4778\approx 8.8669$

(IV). 1. $dy=(4x^3-6x^2+5x-2)dx$

3. $dy=-\dfrac{3xdx}{\sqrt{1-3x^2}}$

5. $dy=\dfrac{4xdx}{(3)\sqrt[3]{(4-2x^2)^2}}$

7. $dy=\left(2x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\dfrac{x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

9. $dy=m5^{mx}\ln 5dx$

11. $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$

13. $dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\dfrac{x}{1+x^2}dx$

15. $dy=\dfrac{a\log e}{ax+b}dx$

17. $dy=-4\operatorname{sen}2xdx$

19. $dy = (\csc x - x\csc x\cot x)dx$

21. $dy = \dfrac{2xdx}{1+(1-x^2)^2}$

23. $dy = \dfrac{-5\,\text{sen}\,5x}{2\sqrt{\cos 5x}}dx$

25. $dy = \dfrac{-\dfrac{2x(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2} - \dfrac{2x}{a^2+x^2}}{2\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}}dx = -\dfrac{2a^2xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2+x^2)^3}}$

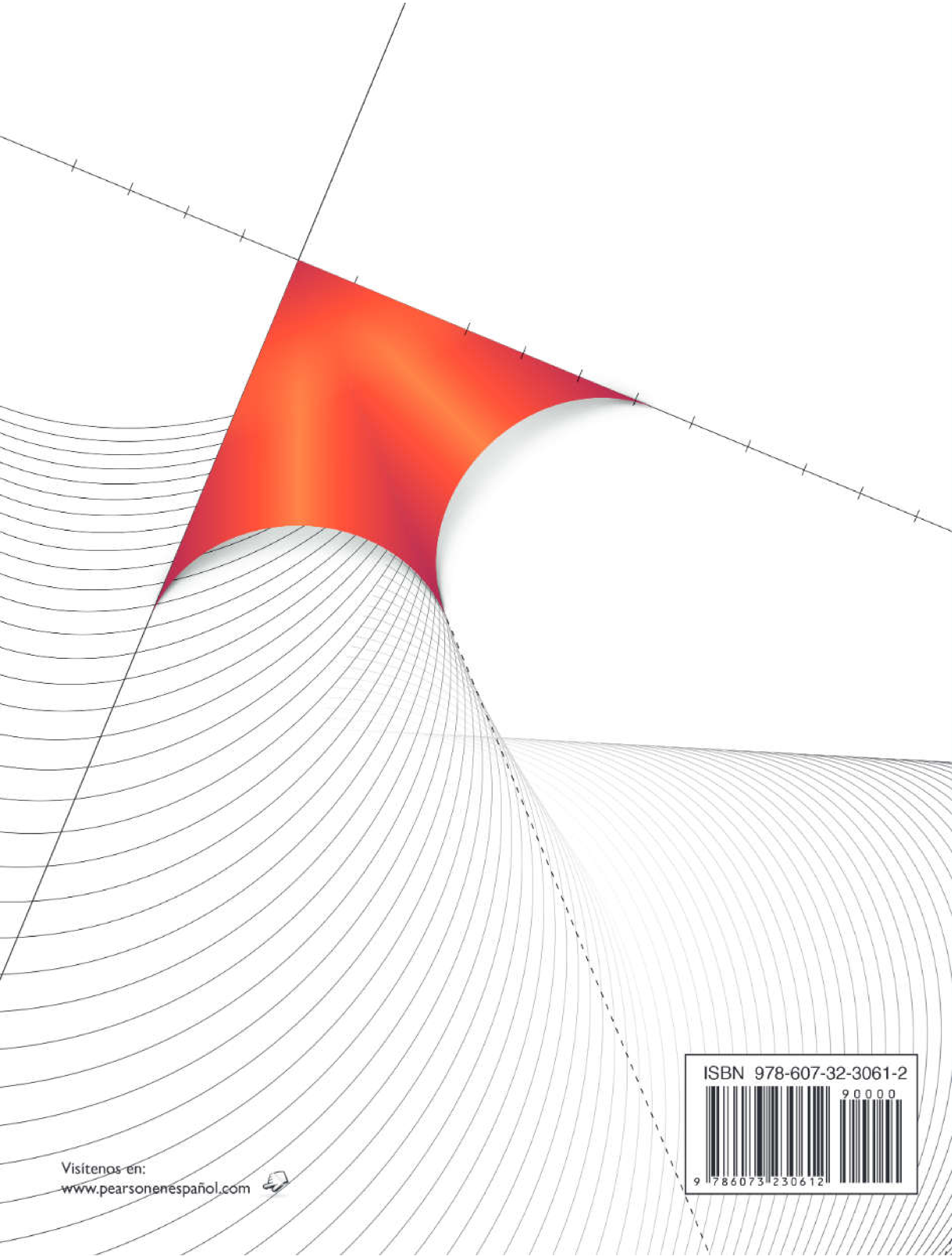
27. $dy = -\dfrac{3x+x}{x+5y}dx$

29. $dy = -\dfrac{x+\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1}dx$

31. $dy = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}dx = \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}dx$

33. $dy = \dfrac{y^2-4x}{6-2xy}dx$

35. $dy = -\dfrac{3+12x^2}{\sqrt{1-(3x+4x^3)^2}}dx$



Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-3061-2